1

解答解説のページへ

$a>b>0$ とする。円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点を P とする。また, 円の外部の点 $(b,\ c)$ からこの円に 2 本の接線を引き, 接点を Q, R とする。このとき, 2 点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上の 16 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y) \mid x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ y = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選ぶ試行において，次の事象の起こる確率を求めよ。

「選んだ 3 点が三角形の頂点となり，その三角形の面積は $\dfrac{9}{2}$ である」

3

解答解説のページへ

どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても，$x = 3m + 5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 x に対して, x を越えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。n を正の整数とし,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\sqrt{2n^2 - k^2}\right]}{n^2}$$

とおく。このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

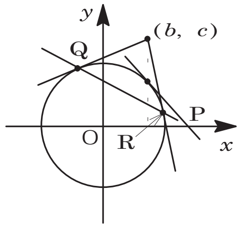
立方体 X と球 Y があって，両者の体積は等しいとする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，円周率は $\pi = 3.14\cdots\cdots$ である。

(1) 立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの頂点が球 Y の内部に含まれるようにしたい。最大何個の頂点が含まれるようにできるか。

(2) 立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの辺が球 Y の内部と共通の点をもつようにしたい。最大何個の辺が共通の点をもつようにできるか。

1

問題のページへ



$Q(x_1,\ y_1)$, $R(x_2,\ y_2)$ とおくと, Q, R における接線は,

$$x_1x + y_1y = a^2,\ \ x_2x + y_2y = a^2$$

これらの接線は, ともに点 $(b,\ c)$ を通るので,

$$bx_1 + cy_1 = a^2 \cdots\cdots①,\ \ bx_2 + cy_2 = a^2 \cdots\cdots②$$

ここで, 方程式 $bx + cy = a^2$ ……③を考えると, これは直線を表し, ①より点 Q を通り, ②より点 R を通ることがわかる。すなわち, ③は直線 QR を表す。

さて, 点 $\left(b,\ \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ における接線は,

$$bx + \sqrt{a^2 - b^2}\,y = a^2$$

x 軸との交点は, $x = \dfrac{a^2}{b}$, $y = 0$ より, 点 $P\left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ となる。

そこで, $(x,\ y) = \left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ を③に代入すると, ③が成立することがわかるので, 直線 QR は点 P を通る。

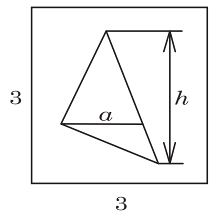
［解 説］

毎年のように出題されてきた有名問題です。そして, 上記の解はその有名な解法です。

© 電送数学舎 2000

2

問題のページへ

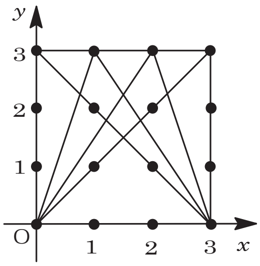


1 辺の長さ 3 の正方形の内部または辺上に頂点のある三角形を考え，右図のように長さ a, h を決めると，三角形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ah\leqq\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}$$

これより，$S=\dfrac{9}{2}$ となるのは $x=y=3$，すなわち三角形の少なくとも 1 つの辺が，正方形と辺を共有するときである。

さて，ここで条件を満たす 16 個の格子点から 3 個の格子点を選ぶ場合の数は ${}_{16}C_3=560$ 通りである。



また，3 個の格子点を結んでできる三角形の面積 S が，$S=\dfrac{9}{2}$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　三角形の 1 辺だけが正方形と辺を共有するとき

1 つの共有辺に対して，三角形が 2 通りずつ決まるので，$2\times 4=8$ 通りある。

(ii)　三角形の 2 辺が正方形と辺を共有するとき

直角二等辺三角形となる場合なので, 4 通りある。

(i)(ii)より，合わせて $8+4=12$ 通りとなる。

以上より，$S=\dfrac{9}{2}$ となる確率は，$\dfrac{12}{560}=\dfrac{3}{140}$ となる。

［解 説］

たくさんの場合分けが必要なのではないかと思いましたが，$S=\dfrac{9}{2}$ が正方形の面積の半分であることがわかり，ホッとしました。しかし，前半の論理は直観的には明らかなのですが，記述するのは手間がかかります。

© 電送数学舎 2000

3

問題のページへ

まず, 8 以上の整数 x は, 0 以上の整数 m, n を用いて, $x=3m+5n$ の形に表せることを示す。

$n=0$ のとき $x=3m$ となり, $m\geqq 0$ より x は 3 以上の 3 の倍数をすべて表すことができる。

$n=1$ のとき $x=3m+5=3(m+1)+2$ となり, $m+1\geqq 1$ より x は 3 で割った余りが 2 となる 5 以上の整数をすべて表すことができる。

$n=2$ のとき $x=3m+10=3(m+3)+1$ となり, $m+3\geqq 3$ より x は 3 で割った余りが 1 となる 10 以上の整数をすべて表すことができる。

以上より, 8 以上の整数 x は, $x=3m+5n$ の形に表せる。

さて, $(m,\ n)=(1,\ 1)$ で $x=8$ となるので, 8 より小さい自然数 x が $x=3m+5n$ の形に表せるのは, $(m,\ n)=(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 1)$ の場合だけであり, 順に $x=3,\ 6,\ 5$ となる。

すると, 0 以上の整数 m, n を用いて, $x=3m+5n$ とは表すことができない自然数 x は 1, 2, 4, 7 だけである。

[解 説]

いきなり 8 以上の整数がすべて $3m+5n$ の形で表せることがわかったわけではありません。m, n に 0 以上の整数を具体的にあてはめて推測をしました。ただ, 3 と 5 が互いに素なので, 整数 m, n を用いて $3m+5n$ の形で, 任意の整数が表せるということは, 基本の 1 つです。

© 電送数学舎 2000

4

問題のページへ

一般的に$[x]\leqq x<[x]+1$より，$x-1<[x]\leqq x$なので，

$$\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\right]}{n^2}\leqq\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

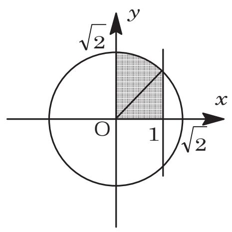
各辺で$k=1$から$k=n$までの和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

ここで，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$とおくと，区分求積法を用いて，

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$



また，$c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}$とすると，

$$c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{n}{n^2}=b_n-\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

すると，$c_n<a_n\leqq b_n$で$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

［解 説］

はさみうちの原理と区分求積法を用いる融合問題です。それをすばやく見抜ける眼力が必要です。

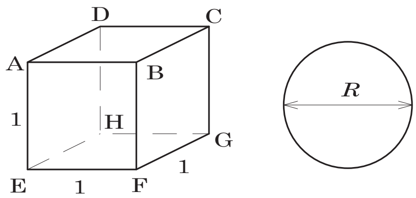
© 電送数学舎 2000

5

問題のページへ

(1)　立方体 X の 1 辺の長さを 1，球 Y の直径を R とすると，条件より，

$$1^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3,\ \ R^3=\frac{6}{\pi}\ \cdots\cdots\cdots ①$$



まず，X の頂点間の距離は 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ のいずれかである。

また①より，$1<R^3<2\sqrt{2}$ なので，$1<R<\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$

これより，Y の内部に X の頂点を 2 つ含むことはできる。しかし，X には距離がすべて 1 の 3 つの頂点は存在しないので，Y の内部に X の頂点を 3 つ含むことはできない。

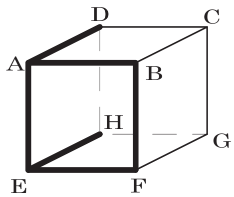
したがって，Y の内部に含まれる X の頂点の最大数は 2 である。

(2)　(1)より，2 頂点 A と E はともに Y の内部に含むことができるので，5 つの辺 AE, AB, AD, EF, EH は Y の内部と共通の点をもつ。

さて，次に X の 6 つの辺と Y の内部が共通の点をもつとすると，3 つの場合が考えられる。

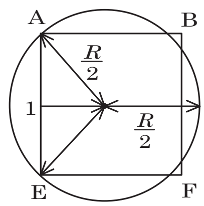
(i)　X の 2 つの頂点が Y の内部に含まれるとき

頂点 A と E が Y に含まれるとし，②より，6 つの辺 AE, AB, AD, EF, EH, BF と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。



ここで，球 Y の大円が 2 頂点 A, E を通る場合を考え，辺 BF と共通の点をもつ場合を考えると，右図より，

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{R}{2}\geqq 1\ \cdots\cdots\cdots ③$$



③ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{R^2-1}+R\geqq 2$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{R^2-1}\geqq 2-R\ \cdots\cdots\cdots ④$

②より，④ $\Leftrightarrow$ $R^2-1\geqq(2-R)^2$ $\Leftrightarrow$ $R\geqq\dfrac{5}{4}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$

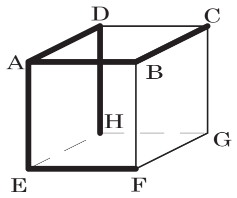
①より，⑤ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{6}{\pi}\geqq\left(\dfrac{5}{4}\right)^3$ $\Leftrightarrow$ $\pi\leqq\dfrac{6\cdot 4^3}{5^3}=3.072\ \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑥は $\pi>3.14$ より成立しない。すなわち，③は不成立となり，2 頂点 A, E が Y の内部に含まれる場合，辺 BF とは共通の点をもたない。よって，この場合はありえない。

(ii)　X の 1 つの頂点だけが Y の内部に含まれるとき

頂点 A だけが Y に含まれるとし，②より，6 つの辺 AE, AB, AD, EF, BC, DH と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。

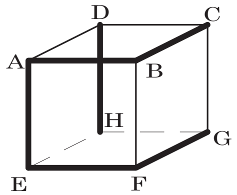
© 電送数学舎 2000



このとき，立方体 X と球 Y を面 AEFB を含む平面に正射影して考えると，頂点 A は Y を正射影した円に含まれ，また辺 BC と Y の内部が共通の点をもつことより，点 B も Y を正射影した円に含まれる。

すると，(i)よりこの円は辺 EF と共通の点をもたないことより，この場合はありえない。

(iii) X の頂点が Y の内部に含まれないとき



②より, 6 つの辺 AE, AB, EF, BC, FG, DH と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。

このとき，(ii)と同じく，立方体 X と球 Y を面 AEFB を含む平面に正射影して考えると，辺 BC，FG と Y の内部が共通の点をもつことより，点 B，F がともに Y を正射影した円に含まれる。

すると，(i)よりこの円は辺 AE と共通の点をもたないことより，この場合はありえない。

(i)(ii)(iii)より, Y の内部と X の 6 つの辺が共通の点をもつことはない。

以上より, Y の内部と共通の点をもつ X の辺の最大数は 5 である。

［解 説］

(1)は基本的ですが，(2)については難でした。(1)を使えば，5 辺の場合には条件を満たすことはすぐにわかるのですが，その後, 6 辺についての考察がたいへんでした。球の内部に含まれる頂点の個数をもとに場合分けをしましたが，内部に含まれる辺を決めるプロセスは，パズルに向かっていく気分で解いていきましたので，その詳細は省略しました。時間無制限で解くには楽しい問題でしょうが……。

© 電送数学舎 2000