1

解答解説のページへ

座標平面上の 4 点 A$(1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(2,\ 8)$，D$(1,\ 8)$ を頂点とする長方形を R とする。また $0<t<4$ に対し，原点 O$(0,\ 0)$，点 E$(4,\ 0)$，および点 P$(t,\ 8t-2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

(1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。

(2) t が $0<t<4$ の範囲で動くとき，$f(t)$ を最大にする t の値と，そのときの最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

空間のベクトル$\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$を考える。ただし，どちらも零ベクトルではないとする。$k=1,\ 2,\ 3$に対し，複素数$z_k=x_k+y_ki$（$i=\sqrt{-1}$は虚数単位）を考え，複素数$w_k=u_k+v_ki$（u_k，v_kは実数）を$w_k=(\sqrt{3}+i)z_k$で定める。さらにu_k，v_kから定まるベクトル$\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$，$\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$を考える。

(1) $\vec{x}$の大きさをr，$\vec{y}$の大きさをs，$\vec{x}$と$\vec{y}$のなす角をθ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$とするとき${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2$を$r$，$s$，$\theta$で表せ。

(2) $\vec{x}$と$\vec{y}$の大きさが等しく，両者はたがいに垂直であるとする。このとき$\vec{u}$と$\vec{v}$も大きさが等しく，たがいに垂直であることを示せ。

(3) (2)の仮定のもとで，$\vec{x}$と$\vec{u}$のなす角を求めよ。

3

解答解説のページへ

各整数 k に対し，座標平面上の点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$をとり，3 点 P_{k-1}，P_k，Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える。また，各自然数 n に対し

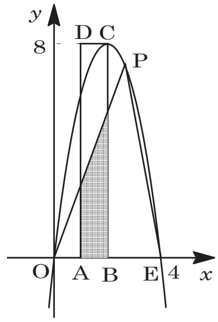
$$f_n(x) = 2\times 10^{-nx}$$

とおく。曲線 $y = f_n(x)$ 上の動点 R が，点 $(0,\ 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき，三角形 T_k のうち，R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

1

問題のページへ

(1)　直線 OP : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t}x=(8-2t)x$ ………①



また，直線 PE : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t-4}(x-4)=-2t(x-4)$ ………②

(i)　$0<t<1$ のとき

PE と AD の交点は②より $(1,\ 6t)$，また PE と BC の交点は②より $(2,\ 4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{6t+4t}{2}\cdot(2-1)=5t$$

(ii)　$1\leqq t<2$ のとき

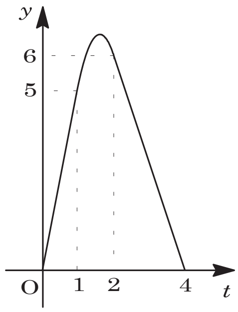
OP と AD の交点は①より $(1,\ 8-2t)$ なので，直線 $x=t$ の左右にある 2 つの台形の面積の和を考えて，

$$f(t)=\frac{8-2t+8t-2t^2}{2}\cdot(t-1)+\frac{4t+8t-2t^2}{2}\cdot(2-t)=-4t^2+13t-4$$

(iii) $2\leqq t<4$ のとき

OP と BC の交点は①より $(2,\ 16-4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{8-2t+16-4t}{2}\cdot(2-1)=-3t+12$$



(2)　$1\leqq t<2$ のとき，

$$f(t)=-4t^2+13t-4=-4\left(t-\frac{13}{8}\right)^2+\frac{105}{16}$$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{13}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{105}{16}$ をとる。

［解 説］

ていねいに場合分けをして，ていねいに計算をすすめていけば，正解に到達するという問題です。

2

問題のページへ

(1) $|\vec{x}|=r$，$|\vec{y}|=s$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=rs\cos\theta$ より，$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=rs\cos\theta$

$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=r^2$，$y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2=s^2$

すると，$z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2=(x_1+y_1i)^2+(x_2+y_2i)^2+(x_3+y_3i)^2$

$=(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)i-(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$

$=r^2+2rsi\cos\theta-s^2$

(2) $w_k=(\sqrt{3}+i)(x_k+y_ki)=(\sqrt{3}x_k-y_k)+(x_k+\sqrt{3}y_k)i$ より，

$u_k=\sqrt{3}x_k-y_k$，$v_k=x_k+\sqrt{3}y_k$

すると，$|\vec{u}|^2=u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2=(\sqrt{3}x_1-y_1)^2+(\sqrt{3}x_2-y_2)^2+(\sqrt{3}x_3-y_3)^2$

$=3(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)-2\sqrt{3}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$

$=3r^2-2\sqrt{3}rs\cos\theta+s^2$

$|\vec{v}|^2=v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2=(x_1+\sqrt{3}y_1)^2+(x_2+\sqrt{3}y_2)^2+(x_3+\sqrt{3}y_3)^2$

$=(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+2\sqrt{3}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+3(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$

$=r^2+2\sqrt{3}rs\cos\theta+3s^2$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

$=\sqrt{3}(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)-\sqrt{3}(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$

$=\sqrt{3}r^2+2rs\cos\theta-\sqrt{3}s^2$

条件より，$r=s$，$\cos\theta=0$ なので，$|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

よって，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は大きさが等しく，たがいに垂直である。

(3) まず，$\vec{x}\cdot\vec{u}=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$

$=x_1(\sqrt{3}x_1-y_1)+x_2(\sqrt{3}x_2-y_2)+x_3(\sqrt{3}x_3-y_3)$

$=\sqrt{3}(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$

$=\sqrt{3}r^2-rs\cos\theta=\sqrt{3}r^2$

また，$|\vec{x}|=r$，$|\vec{u}|=\sqrt{3r^2+r^2}=2r$ なので，$\vec{x}$ と $\vec{u}$ のなす角を φ とすると，

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}r^2}{r\cdot 2r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\varphi=30^\circ$ である。

［解 説］

とりたてて工夫をすることもなく，普通に計算をしていきました。

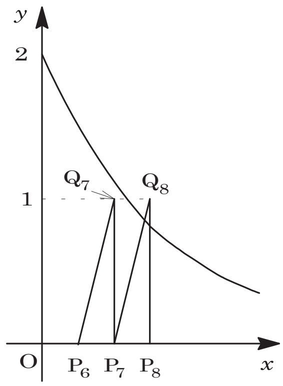
3

問題のページへ

条件より，点 $Q_7\left(\dfrac{7}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ 上またはその下側にあるので,

$$2\times 10^{-\frac{7}{500}n}\geqq 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 $Q_8\left(\dfrac{8}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ の上側にあるので,



$$2\times 10^{-\frac{8}{500}n}<1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$10^{-\frac{7}{500}n}\geqq 2^{-1}$，$-\dfrac{7}{500}n\geqq \log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n\leqq \dfrac{150.5}{7}=21.5 \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$10^{-\frac{8}{500}n}<2^{-1}$，$-\dfrac{8}{500}n<\log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n>\dfrac{150.5}{8}=18.8125 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より, n は整数なので，$n=19,\ 20,\ 21$ である。

［解 説］

一見, 難問風の装いをしていますが, 内容は対数計算だけでした。