1

解答解説のページへ

2 つの複素数$z = x + yi$，$w = u + vi$（x，y，u，v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位）に対し，$x \geqq u$ と $y \geqq v$ がともに成り立つとき，$z \gg w$ と書くことにする。

(1) 次の条件$z^2 \gg 3$ かつ$\overline{z} \gg -\dfrac{5}{z}$をみたす複素数 z の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数とする。

(2) (1)で求めた範囲を z が動くとき，絶対値$|z-3i|$の最小値，および最小値をあたえる z を求めよ。

2

解答解説のページへ

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく。曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただ一つ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

半径 1 の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする。ただし，n は自然数である。

(1) 線分 P_0P_k の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ。

(2) 点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} のうちの相異なる 3 点を頂点にもつ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3$ を考える。n , k を自然数とし

$$g_n(k)=f\left(\frac{\pi}{3n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n\geqq 2$ とする。

(1)　n を固定する。$2\leqq k\leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。
　また, k が $1\leqq k\leqq 3n$ の範囲を動くとき，$g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2)　(1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$において，各項a_nが$a_n \geqq 0$をみたし，かつ$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$が成り立つとする。さらに各$n$に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\quad c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1)　すべてのnに対し不等式$b_n \geqq c_n$が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2)　あるnについて$b_{n+1} = c_{n+1}$が成り立てば，$b_n = c_n$となることを示せ。

(3)　$b_3 = \dfrac{1}{2}$となるとき，$c_3 = \dfrac{1}{2}$であることを示せ。また$b_3 = \dfrac{1}{2}$となる数列$\{a_n\}$は全部で何種類あるかを求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ なので，$z^2\gg 3$ より，

$$x^2-y^2\geqq 3\cdots\cdots\cdots①,\ \ 2xy\geqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\bar{z}=x-yi$，$-\dfrac{5}{z}=-\dfrac{5}{x-yi}=-\dfrac{5(x+yi)}{x^2+y^2}$ なので，$\bar{z}\gg-\dfrac{5}{z}$ より，

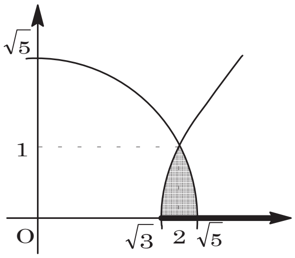
$$x\geqq-\frac{5x}{x^2+y^2},\ \ -y\geqq-\frac{5y}{x^2+y^2}$$

$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ で，$x(x^2+y^2+5)\geqq 0\cdots\cdots\cdots③$，$y(x^2+y^2-5)\leqq 0\cdots\cdots\cdots④$

②より $xy\geqq 0$，③より $x\geqq 0$ なので，

$$x\geqq 0,\ \ xy\geqq 0,\ \ y(x^2+y^2-5)\leqq 0,\ \ x^2-y^2\geqq 3$$

z の範囲を図示すると，右図の網点部および太線部となる。ただし，境界はすべて含む。



(2)　z と $3i$ の距離が最小となるのは，右図より，z が曲線 $x^2-y^2=3$ 上にあるときなので，

$$\begin{aligned}|z-3i|^2&=x^2+(y-3)^2=(y^2+3)+(y-3)^2\\&=2y^2-6y+12=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

$0\leqq y\leqq 1$ より，$y=1$ のとき $|z-3i|^2$ は最小値 8 をとる。

よって，$|z-3i|$ の最小値は $2\sqrt{2}$，このとき $z=2+i$ である。

［解 説］

(1)は，式を変形せずに共通部分を図示した方が，かえって近道です。積が 0 以上や 0 以下というのはアブナイですから。

2

問題のページへ

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より，$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

接点を $(t,\ t^4+t^3-3t^2)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^4+t^3-3t^2)=(4t^3+3t^2-6t)(x-t)$$

$$y=(4t^3+3t^2-6t)x-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots①$$

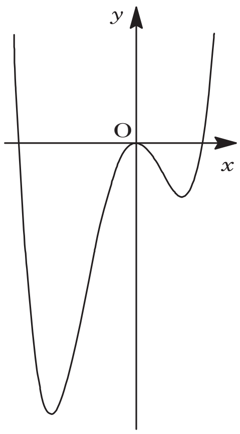
①が点 $(0,\ a)$ を通るので，

$$a=-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g(t)=-3t^4-2t^3+3t^2$ とおくと，

$$g'(t)=-12t^3-6t^2+6t$$

$$=-6t(2t-1)(t+1)$$



点 $(0,\ a)$ を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は，②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

すると，右表において $2>\dfrac{5}{16}$ なので，$a=2$ のときである。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{16}$	$\searrow$

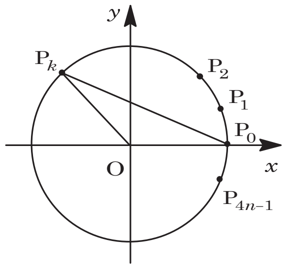
［解 説］

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは，4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

3

問題のページへ

(1)　$\angle P_0OP_k = \dfrac{2\pi}{4n}k = \dfrac{\pi}{2n}k$ であり，条件より $P_0P_k \geqq \sqrt{2}$ なので $P_0P_k{}^2 \geqq 2$



$\triangle P_0OP_k$ に余弦定理を適用して，

$$1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2n}k \geqq 2$$

$\cos\dfrac{\pi}{2n}k \leqq 0$ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2n}k \leqq \dfrac{3\pi}{2}$

よって，$n \leqq k \leqq 3n$

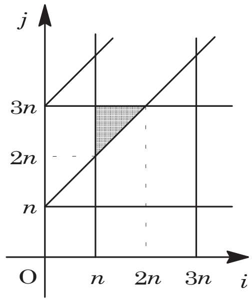
(2)　P_0 を 1 つの頂点とする三角形を考え，他の頂点を P_i，P_j $(i<j)$ とおくと，

$P_0P_i \geqq \sqrt{2}$ から，$n \leqq i \leqq 3n$ ………①

$P_iP_j \geqq \sqrt{2}$ から，$i+n \leqq j \leqq i+3n$ ………②

$P_jP_0 \geqq \sqrt{2}$ から，$4n-3n \leqq j \leqq 4n-n$

$n \leqq j \leqq 3n$ ………③



①②③を満たす領域は右図のようになり，この領域内の $(i,\ j)$ の組の個数は，

$$\sum_{i=n}^{2n}\{3n-(i+n)+1\} = \sum_{i=n}^{2n}(2n-i+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

P_1 を 1 つの頂点とする三角形，P_2 を 1 つの頂点とする三角形，……，P_{4n-1} を 1 つの頂点とする三角形についても同数となり，また条件を満たす三角形を重複して 3 回数えていることより，求める個数 $g(n)$ は，

$$g(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot 4n\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}n(n+1)(n+2)$$

[解 説]

(2)は格子点の個数を対応させて数えました。よく見かける頻出題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$g_n(k-1) \geqq g_n(k)$ より，$g_n(k)-g_n(k-1) \leqq 0$ なので，$f\left(\dfrac{k\pi}{3n}\right) \leqq 0$ ………①

さて，$f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3=(2\cos x-3)(2\cos x-1)$

$f(x) \leqq 0$ とすると，$\cos x \geqq \dfrac{1}{2}$ なので，①より $\cos\dfrac{k\pi}{3n}x \geqq \dfrac{1}{2}$ ………②

$2 \leqq k \leqq 3n$ から，$\dfrac{2\pi}{3n} \leqq \dfrac{k\pi}{3n} \leqq \pi$ となり，②を満たすのは，$\dfrac{2\pi}{3n} \leqq \dfrac{k\pi}{3n} \leqq \dfrac{1}{3}\pi$

よって，$2 \leqq k \leqq n$ となり，求める k は，$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$

すると，$g_n(k-1) > g_n(k)$ となるのは $2 \leqq k \leqq n-1$，また $g_n(k-1)=g_n(k)$ となるのは $k=n$，さらに $g_n(k-1) < g_n(k)$ となるのは $n+1 \leqq k \leqq 3n$ なので，

$$g_n(1) > g_n(2) > \cdots > g_n(n-1) = g_n(n) < g_n(n+1) < \cdots < g_n(3n)$$

よって，$g_n(k)$ が最小となる k は，$n-1$ または n である。

(2)　(1)より，$G_n = g_n(n) = f\left(\dfrac{\pi}{3n}\right)+f\left(\dfrac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\dfrac{n\pi}{3n}\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{\pi}{3n}k\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)=\frac{3}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2 x-8\cos x+3)\,dx=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos 2x-8\cos x+5)\,dx$$

$$=\frac{3}{\pi}\Big[\sin 2x-8\sin x+5x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{21\sqrt{3}}{2\pi}+5$$

[解 説]

(1)は階差数列を用いた最大・最小問題, (2)は区分求積法による極限計算となっています。一見, 畑違いの分野が 1 つの問題にうまく収まっています。

5

問題のページへ

(1) (i)　$n=1$ のとき　$b_1=c_1=1-a_1$ より，$b_1 \geqq c_1$ は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$b_k \geqq c_k$ と仮定すると，$b_k-c_k \geqq 0$

$b_{k+1}-c_{k+1}=(1-a_{k+1})b_k-(c_k-a_{k+1}) \geqq a_{k+1}(1-b_k)$ ………①

ここで，$a_n \geqq 0$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}$ より，$0 \leqq a_n \leqq \frac{1}{2}$ となるので，$\frac{1}{2} \leqq 1-a_n \leqq 1$

よって，$b_k=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k) \leqq 1$ から，$a_{k+1}(1-b_k) \geqq 0$ ………②

①②より，$b_{k+1}-c_{k+1} \geqq 0$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対し，不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つ。

(2) 条件より，ある n に対して，$b_{n+1}-c_{n+1}=(b_n-c_n)+a_{n+1}(1-b_n)=0$

ここで，②より $a_{n+1}(1-b_n) \geqq 0$ なので，$b_n-c_n \leqq 0$

ところが, (1)より $b_n-c_n \geqq 0$ なので，$b_n-c_n=0$ となる。

(3) $c_3=1-(a_1+a_2+a_3)$ で，$0 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}$ より，$\frac{1}{2} \leqq c_3 \leqq 1$

ところが，$b_3=\frac{1}{2}$ のとき, (1)より $c_3 \leqq \frac{1}{2}$ となるので，$c_3=\frac{1}{2}$ である。

さて，$b_3=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)=\frac{1}{2}$ ……③，$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)=\frac{1}{2}$ ……④

③より，$1-(a_1+a_2+a_3)+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)-a_1a_2a_3=\frac{1}{2}$

④を代入して，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=a_1a_2a_3$ ………⑤

また, (2)より $b_3=c_3=\frac{1}{2}$ のとき，$b_2=c_2$ なので,

$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)$，$a_1a_2=0$ ………⑥

(i)　$a_1=0$ のとき　⑤より $a_2a_3=0$

$a_2=0$ のとき③より $a_3=\frac{1}{2}$，$a_3=0$ のとき③より $a_2=\frac{1}{2}$

(ii)　$a_1 \neq 0$ のとき　⑥より $a_2=0$ で，⑤より $a_3a_1=0$ なので $a_3=0$

このとき，③より $a_1=\frac{1}{2}$

(i)(ii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right), \left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right), \left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$

すると，このいずれの組も，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}$ から $n \geqq 4$ において $a_n=0$ となるので，求める数列 $\{a_n\}$ は全部で 3 種類存在する。

［解 説］

思考がなめらかに流れていくように，設問に工夫がいろいろ施されています。