1　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　実数の定数 p に対して，3 次方程式 $x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ。

(2)　$p,\ q$ は定数で $p \geqq 2,\ q \geqq 2$ とする。2 つの 3 次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とするとき，$|\alpha-\beta| \leqq \frac{1}{4}|p-q|$ が成立することを示せ。

2

解答解説のページへ

平面上に 3 つの放物線$C_1: y=-x(x-1)$，$C_2: y=x(x-1)$，$C: y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$を考える。いま実数 t に対して，C はC_1上の点$(t,\ -t^2+t)$を通り，その点でC_1と共通の接線をもつとする。

(1) a, b を t を用いて表せ。

(2) 2 つの放物線 C，C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。

(3) t を動かすとき, S の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A，B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を $1:2$ の比に内分する点を R とする。いま k を正の定数として，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ とおく。ただし，$\mathrm{Q}=\mathrm{A}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{A}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく。

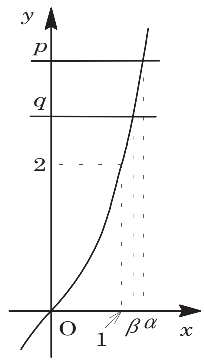
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{q}$ を用いて表せ。

(2)　点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする。K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(3)　円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$x^3+x-p=0$ より，$x^3+x=p$

$f(x)=x^3+x$ とおくと，$f'(x)=3x^2+1>0$

よって，$f(x)$ は単調増加関数である。すると，$y=f(x)$ と $y=p$ のグラフはつねに 1 つの共有点をもつことになり，$x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個である。

(2)　$f(\alpha)=p$，$f(\beta)=q$ なので, $p\geqq 2$, $q\geqq 2$ から，$\alpha\geqq 1$，$\beta\geqq 1$ となる。

(i)　$\alpha=\beta$ のとき

$p=q$ となるので，$|\alpha-\beta|=\dfrac{1}{4}|p-q|$ が成り立つ。

(ii)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$$\frac{|p-q|}{|\alpha-\beta|}=\left|\frac{p-q}{\alpha-\beta}\right|=\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|=\left|\frac{\alpha^3+\alpha-(\beta^3+\beta)}{\alpha-\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1)}{\alpha-\beta}\right|=|\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1|$$

$$>1+1+1+1=4$$

よって，$|p-q|>4|\alpha-\beta|$ より，$|\alpha-\beta|<\dfrac{1}{4}|p-q|$

(i)(ii)より，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$ となる。

［解　説］

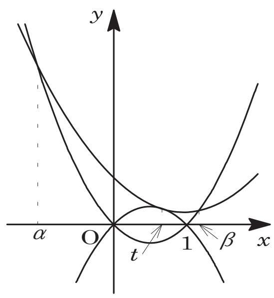
(2)については，まず $f'(1)=4$ より平均値の定理の利用という解法が浮かびましたが，これは範囲外でした。

2

問題のページへ

(1)　$C_1: y=-x^2+x$ ……①, $C_2: y=x^2-x$ ……②

$$C: y=\frac{1}{2}x^2+ax+b \cdots\cdots③$$



まず, ③が点$(t,\ -t^2+t)$を通るので,

$$-t^2+t=\frac{1}{2}t^2+at+b,\ at+b=-\frac{3}{2}t^2+t \cdots\cdots④$$

また, ③より$y'=x+a$となり, $x=t$のとき$y'=t+a$である。一方, ①より$y'=-2x+1$となり, $x=t$のとき$y'=-2t+1$であるので,

$$t+a=-2t+1,\ a=-3t+1 \cdots\cdots⑤$$

⑤を④に代入して, $t(-3t+1)+b=-\frac{3}{2}t^2+t$, $b=\frac{3}{2}t^2$

(2)　(1)より, ③は, $y=\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2 \cdots\cdots③'$

②と③′の交点は, $x^2-x=\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2$, $\frac{1}{2}x^2+(3t-2)x-\frac{3}{2}t^2=0$

$$x=-(3t-2)\pm\sqrt{(3t-2)^2+3t^2}=-(3t-2)\pm2\sqrt{3t^2-3t+1}$$

この解をα, β $(\alpha<\beta)$とおくと,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2-(x^2-x)\right\}dx=\int_\alpha^\beta-\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\left(4\sqrt{3t^2-3t+1}\right)^3=\frac{16}{3}\left(\sqrt{3t^2-3t+1}\right)^3$$

(3)　$f(t)=3t^2-3t+1$とおくと, $S=\frac{16}{3}\left(\sqrt{f(t)}\right)^3$となり,

$$f(t)=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geqq\frac{1}{4}$$

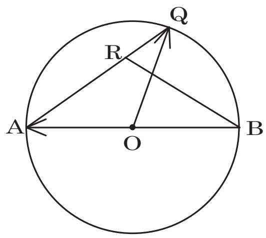
よって, $t=\frac{1}{2}$のとき, Sは最小値$\frac{16}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3=\frac{2}{3}$をとる。

［解 説］

微積分についての頻出基本問題です。計算量も妥当です。

3

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{q}}{3}-(-\vec{a})=\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{q}$

(2)　条件より，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}=(\vec{q}-\vec{a})+k\left(\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{q}\right)$

$$=\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$$

$$\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}=\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\cdots\cdots\cdots①$$

点 Q は O を中心とする半径 1 の円周上にあるので，$|\vec{q}|=1$

$$\left(\frac{2}{3}k+1\right)|\vec{q}|=\frac{2}{3}k+1,\ \left|\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}\right|=\frac{2}{3}k+1\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入して，$\left|\vec{p}-\left(\dfrac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|=\dfrac{2}{3}k+1\cdots\cdots\cdots③$

よって点 P は，中心の位置ベクトルが$\left(\dfrac{4}{3}k-1\right)\vec{a}$で，半径$\dfrac{2}{3}k+1$の円を描く。

(3)　③の円の内部に点 A が含まれるので，$\left|\vec{a}-\left(\dfrac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|<\dfrac{2}{3}k+1$

$$\left|\left(2-\frac{4}{3}k\right)\vec{a}\right|<\frac{2}{3}k+1,\ \left|2-\frac{4}{3}k\right||\vec{a}|<\frac{2}{3}k+1$$

$|\vec{a}|=1$ より，$\left|2-\dfrac{4}{3}k\right|<\dfrac{2}{3}k+1$，$-\dfrac{2}{3}k-1<2-\dfrac{4}{3}k<\dfrac{2}{3}k+1$

$$-\frac{2}{3}k-1<2-\frac{4}{3}k\cdots\cdots④,\ 2-\frac{4}{3}k<\frac{2}{3}k+1\cdots\cdots⑤$$

④より $k<\dfrac{9}{2}$，⑤より $k>\dfrac{1}{2}$ なので，$\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{9}{2}$ となる。

［解 説］

誘導がていねいについており，センター試験風の構成になっています。