1　　解答解説のページへ

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとする。このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ。

2

解答解説のページへ

平面上に双曲線$C: y=\dfrac{1}{x}$を考える。$a,\ b,\ c,\ d$ を $d<c<0<b<a$ を満たす数とし，曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S をそれぞれ x 座標が a, b, c, d であるような点としたとき，四角形 PQSR が長方形になっているとする。

(1)　b, c, d を a を用いて表せ。

(2)　線分 PR と x 軸との交点を T，線分 QS と y 軸との交点を U とするとき，線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲にあるとき，3 線分 PT，TU，UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$を求めよ。

(4)　a が(2)の範囲を動くとき，$S(a)$の増減を調べ，その最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

α を $|\alpha|=1$ であるような複素数とし，複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1=1,\ z_2=\frac{\alpha^4}{2},\ \frac{z_n}{z_{n-1}}=\frac{\alpha^2}{4}\frac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

で定める。ただし，$\overline{z_n}$ は複素数 z_n の共役な複素数とする。

(1)　各 n に対し，z_n を求めよ。

(2)　z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とし，$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき，無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}y_k$ をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

n を $n \geqq 7$ を満たす整数とし, 1 つのさいころを投げる試行を n 回くり返す。このとき, $2 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対し, 「n 回の試行のうち, 同じ目が出るどの 2 つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す。ただし, i 番目の試行と j 番目の試行について, この試行は $|i-j|$ だけ離れているということにする。

(1)　p_2 の値を求めよ。

(2)　$k \geqq 3$ のとき, p_k の値を求めよ。

(3)　「n 回の試行において, 同じ目が続くことはなく, しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する」という事象が起こる確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。ただし $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし, A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ l_{A}, l_{B} とする。2 直線 l_{A}, l_{B} ではさまれた領域の部分で, 円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1, 円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする。いま, D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha)$, $V_2(\alpha)$ とする。

(1) $V_1(\alpha)$, $V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ。

(2) α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

$x^3+ax^2+bx+c=0$ の異なる 3 つの実数解を $x=\alpha$, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とおくと,

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$$

条件より, $a>0$, $b>0$ なので, $\alpha+\beta+\gamma<0$ ……①, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$ ……②

①より, $0>\alpha+\beta+\gamma>\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha$ なので, $\alpha<0$ となる。

ここで, $\beta\geqq 0$ と仮定すると $\gamma>0$ となり, ①より $\alpha+\beta<-\gamma<0$ なので,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)<0$$

これは②に反するので, $\beta<0$ である。

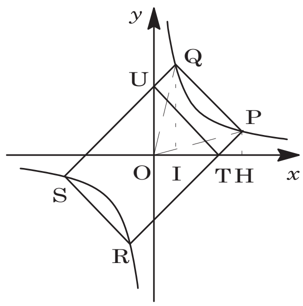
以上より, α, β, γ の少なくとも 2 つは負である。

［解 説］

グラフを利用しようか, 解と係数の関係を利用しようかと迷いましたが, 結局, 後者で解をつくりました。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{R}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$，$\mathrm{S}\left(d,\ \dfrac{1}{d}\right)$とおくと，四角形 PQSR が長方形なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ である。

$$b-a=d-c\cdots\cdots①,\quad \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\cdots\cdots②$$

$$(b-a)(c-a)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\dfrac{a-b}{ab}=\dfrac{c-d}{cd}$ となり，①を代入して，

$$ab=cd\cdots\cdots\cdots④$$

③より $(b-a)(c-a)+\dfrac{a-b}{ab}\cdot\dfrac{a-c}{ac}=0$

$(a-b)(a-c)>0$ より，$1+\dfrac{1}{a^2bc}=0$，$a^2bc+1=0\cdots\cdots\cdots⑤$

①より $d=b-a+c$ として，④に代入すると $ab=c(b-a+c)$

$$b(a-c)+c(a-c)=0,\ (b+c)(a-c)=0$$

$a-c>0$ より，$b+c=0$，$c=-b\cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥より $b-a=d+b$，$d=-a$

⑤⑥より $a^2b^2=1$ で $0<b<a$ より $ab=1$，$b=\dfrac{1}{a}$

さらに，これを⑥に代入して，$c=-\dfrac{1}{a}$

(2)　(1)より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ a\right)$，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{a},\ -a\right)$，$\mathrm{S}\left(-a,\ -\dfrac{1}{a}\right)$となるので，P と Q，R と S は直線 $y=x$ に関して対称になっており，$b=\dfrac{1}{a}<a$ から $1<a$ である。

ここで，直線 PR : $y-\dfrac{1}{a}=x-a$ と x 軸との交点は，$y=0$ として $x=a-\dfrac{1}{a}$ から $\mathrm{T}\left(a-\dfrac{1}{a},\ 0\right)$となる。また，点 U は点 T と直線 $y=x$ に関して対称なので，$\mathrm{U}\left(0,\ a-\dfrac{1}{a}\right)$である。

さて，線分 TU と曲線 C : $y=\dfrac{1}{x}$ が共通点をもたないのは，線分 TU の中点 $\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$が，領域 $xy<1$ に存在することである。

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}\right)^2<1,\ -1<\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}<1,\ -2a<a^2-1<2a$$

$a^2+2a-1>0$ より $a<-1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}<a$ となり，$a^2-2a-1<0$ より $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$ となる。

$1<a$ と合わせて共通範囲を求めると，$1<a<1+\sqrt{2}$

(3)　点 P, Q から x 軸に下ろした垂線の足を，それぞれ H, I とする。

すると，(1)より△OHP と△OIQ の面積は等しいので，線分 OP，OQ と曲線 C によって囲まれた部分の面積は，

$$\triangle\mathrm{OIQ}+\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx-\triangle\mathrm{OHP}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_{\frac{1}{a}}^{a}=\log a-\log\frac{1}{a}=2\log a$$

よって，$S(a)=2\log a+\triangle\mathrm{OUQ}+\triangle\mathrm{OTP}-\triangle\mathrm{OTU}$

$$=2\log a+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$=2\log a-\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2a^2}+2$$

(4)　$S'(a)=\dfrac{2}{a}-a+\dfrac{3}{a^3}=-\dfrac{(a^2-3)(a^2+1)}{a^3}$

a	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より，$a=\sqrt{3}$ のとき $S(a)$ は最大値をとる。

$$S(\sqrt{3})=2\log\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{3}{2\cdot 3}+2=\log 3$$

［解　説］

双曲線を原点のまわりに 45° 回転すれば，長方形が直線 $y=x$ に関して対称であることは明らかです。なお，(3)の解は，線分 OP，OQ と曲線 C によって囲まれた部分の面積が簡単に求められることを利用しています。

3

問題のページへ

(1) $\dfrac{z_n}{z_{n-1}}=\dfrac{\alpha^2}{4}\dfrac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}}$より，$z_n\overline{z_{n-1}}=\dfrac{\alpha^2}{4}z_{n-1}\overline{z_{n-2}}$ ………①

①の両辺の共役複素数を考えて，$\overline{z_n}z_{n-1}=\dfrac{\overline{\alpha}^2}{4}\overline{z_{n-1}}z_{n-2}$

$|\alpha|=1$より，$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$，$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$となり，$\overline{z_n}z_{n-1}=\dfrac{1}{4\alpha^2}\overline{z_{n-1}}z_{n-2}$ ………②

①×②より，$z_n\overline{z_n}z_{n-1}\overline{z_{n-1}}=\dfrac{1}{16}z_{n-1}\overline{z_{n-1}}z_{n-2}\overline{z_{n-2}}$，$z_n\overline{z_n}=\dfrac{1}{16}z_{n-2}\overline{z_{n-2}}$

$|z_n|^2=\dfrac{1}{16}|z_{n-2}|^2$，$|z_n|=\dfrac{1}{4}|z_{n-2}|$ ………③

(i) $n=2k-1\ (k\geqq 1)$のとき

$|z_1|=1$で，③より，$|z_{2k-1}|=\dfrac{1}{4}|z_{2(k-1)-1}|=|z_1|\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

$|z_n|=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}-1}=4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $n=2k\ (k\geqq 1)$のとき

$|z_2|=\left|\dfrac{\alpha^4}{2}\right|=\dfrac{|\alpha|^4}{2}=\dfrac{1}{2}$で，③より，$|z_{2k}|=\dfrac{1}{4}|z_{2(k-1)}|=|z_2|\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

$|z_n|=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(i)(ii)より，$|z_n|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，$|z_n|^2=z_n\overline{z_n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$から，$\overline{z_n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\dfrac{1}{z_n}$ ………④

①④より，$z_n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}\dfrac{1}{z_{n-1}}=\dfrac{\alpha^2}{4}z_{n-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-3}\dfrac{1}{z_{n-2}}$，$\dfrac{z_n}{z_{n-1}}=\alpha^2\dfrac{z_{n-1}}{z_{n-2}}$

よって，$\dfrac{z_n}{z_{n-1}}=\dfrac{z_2}{z_1}(\alpha^2)^{n-2}=\dfrac{\alpha^4}{2}\alpha^{2n-4}=\dfrac{\alpha^{2n}}{2}$

$z_n=z_1\cdot\dfrac{\alpha^4}{2}\cdot\dfrac{\alpha^6}{2}\cdot\dfrac{\alpha^8}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\alpha^{2n}}{2}=\dfrac{\alpha^{4+6+8+\cdots+2n}}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}\alpha^{(n+2)(n-1)}\ (n\geqq 2)$

この式に$n=1$をあてはめると$z_1=1$となり，$n=1$のときも成り立つ。

(2) $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$なので，

$\dfrac{1}{2^{n-1}}\alpha^{(n+2)(n-1)}=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi+i\dfrac{1}{2^{n-1}}\sin\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi$

(1)より，$x_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi$，$y_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\sin\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi$

(i) $n=3l+1\ (l\geqq 0)$のとき

$\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi=\dfrac{2(3l+3)\cdot 3l}{3}\pi=(6l^2+6l)\pi$より，

$(x_n,\ y_n)=\dfrac{1}{2^{n-1}}(\cos 0,\ \sin 0)=\dfrac{1}{2^{n-1}}(1,\ 0)$

(ii) $n=3l+2\ (l\geqq 0)$のとき

$$\frac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi=\frac{2(3l+4)(3l+1)}{3}\pi=\left(6l^2+10l+2+\frac{2}{3}\right)\pi \text{ より},$$

$$(x_n,\ y_n)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(iii) $n=3l+3\ (l\geqq 0)$ のとき

$$\frac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi=\frac{2(3l+5)(3l+2)}{3}\pi=\left(6l^2+14l+6+\frac{2}{3}\right)\pi \text{ より},$$

$$(x_n,\ y_n)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=S_n$，$x_{3n-2}+x_{3n-1}+x_{3n}=s_n$ とおくと，

$$s_1=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

$$S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}s_k=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1},\ \lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7}$$

また，$|x_n|\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}}$ より，$n\to\infty$ のとき $x_n\to 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{3n}+x_{3n+1})=\frac{5}{7},\ \lim_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}(S_{3n+1}+x_{3n+2})=\frac{5}{7}$$

同様にして，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}y_k=T_n$，$y_{3n-2}+y_{3n-1}+y_{3n}=t_n$ とおくと，

$$t_1=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$T_{3n}=\sum_{k=1}^{n}t_k=\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1},\ \lim_{n\to\infty}T_{3n}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

また，$|y_n|\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}}$ より，$n\to\infty$ のとき $y_n\to 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}T_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}(T_{3n}+y_{3n+1})=\frac{3\sqrt{3}}{7},\ \lim_{n\to\infty}T_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}(T_{3n+1}+y_{3n+2})=\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

以上より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k=\frac{5}{7}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}y_k=\frac{3\sqrt{3}}{7}$

［解　説］

大変な計算量で，やっと B5 版 2 枚の量でまとまりました。なお，(1)では①×②で漸化式をつくりましたが，n が 1 つとびのタイプになってしまい，この後ややこしい計算が待ち構えているという気がしましたが，これは杞憂に過ぎませんでした。

4

問題のページへ

(1)　さいころを n 回投げたとき，同じ目が続けて出ない確率は，$1\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ となるので，$p_2=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ である。

(2)　さいころを n 回投げたとき，同じ目の出るのが 3 以上離れているのは，3 回目以降に直前の 2 回の目と異なる目が出ればよいので，

$$p_3=1\times\frac{5}{6}\times\left(\frac{4}{6}\right)^{n-2}=\frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

同様に考えて，$p_4=1\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\left(\frac{3}{6}\right)^{n-3}=\frac{5}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

$$p_5=1\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\left(\frac{2}{6}\right)^{n-4}=\frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$$

$$p_6=1\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-5}=\frac{5}{54}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-5}$$

また，同じ目の出るのが 7 以上離れている場合はないので，$p_k=0\ (k\geqq 7)$

(3)　n 回の試行において，同じ目が続くことはなく，しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する場合は，同じ目が出るどの 2 つの試行も 2 以上離れている場合から，同じ目が出るどの 2 つの試行も 3 以上離れている場合を除いたものなので，その確率は，

$$p_2-p_3=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

［解 説］

問題文の読解力をみるものです。具体的に考えていけば，内容は平易であることがわかりますが，イライラするとミスをしてしまいそうです。

5

問題のページへ

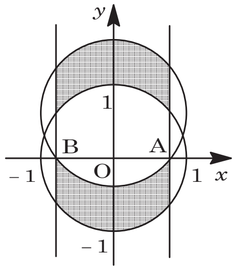
(1)　$C_1 : x^2 + y^2 = 1$ ……①，$C_2 : x^2 + (y - \sin\alpha)^2 = 1$ ……②

に対して，

②と x 軸との交点は，$y = 0$ として，

$$x^2 = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha\ ,\ x = \pm\cos\alpha$$

よって，$l_A : x = \cos\alpha$，$l_B ; x = -\cos\alpha$

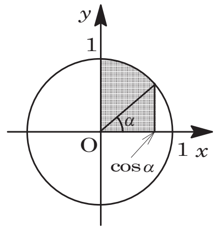


また，①より $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ，②より $y = \sin\alpha \pm \sqrt{1-x^2}$ となるので，

$$V_1(\alpha) = \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} \pi(\sin\alpha + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} \pi(1-x^2)dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\cos\alpha}(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sqrt{1-x^2})dx$$

ここで，右図の網点部の面積から，



$$\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot 1^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

$$V_1(\alpha) = 2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha + 4\pi\sin\alpha\left(\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha + \pi^2\sin\alpha - 2\pi\alpha\sin\alpha$$

$$V_2(\alpha) = \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\pi(1-x^2)dx - \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\pi(\sin\alpha - \sqrt{1-x^2})^2 dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\cos\alpha}(-\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sqrt{1-x^2})dx$$

したがって，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 2\pi\int_0^{\cos\alpha} 2\sin^2\alpha\,dx = 4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$

(2)　(1)より，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\pi(\cos\alpha - \cos^3\alpha)$

ここで，$\cos\alpha = t$ とし，$0 < t < 1$ において $f(t) = t - t^3$ とおくと，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi f(t)$ となり，

$$f'(t) = 1 - 3t^2 = (1-\sqrt{3}t)(1+\sqrt{3}t)$$

t	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	

右表より，$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(t)$ は最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。よって，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値は，

$4\pi\cdot\frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3}\pi$ である。

[解　説]

積分の標準題です。計算も難しくなくホッとします。