**1**

解答解説のページへ

平面ベクトル $\vec{p}=(p_1,\ p_2)$，$\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ に対して，$\{\vec{p},\ \vec{q}\}=p_1q_2-p_2q_1$ と定める。

(1) 平面ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対して，$\{\vec{a},\ \vec{b}\}=l$，$\{\vec{b},\ \vec{c}\}=m$，$\{\vec{c},\ \vec{a}\}=n$ とするとき，$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) (1)で $l,\ m,\ n$ がすべて正であるとする。このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は $0$ 以上の実数 $r, s, t$ を用いて，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すことができることを示せ。

**2**

解答解説のページへ

自然数 $m$ に対して，$m$ の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする。たとえば $f(72)=6$ である。ただし $f(1)=1$ とする。

(1)　$m,\ n$ を自然数，$d$ を $m,\ n$ の最大公約数とするとき，$f(d)f(mn)=f(m)f(n)$ となることを示せ。

(2)　2 つの箱 A，B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている。箱 A，B から 1 枚ずつ札を取り出す。箱 A から取り出した札の番号を $m$，箱 B から取り出した札の番号を $n$ とするとき，$f(mn)=f(m)f(n)$ となる確率 $p_1$ と，$2f(mn)=f(m)f(n)$ となる確率 $p_2$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

放物線 $C: y=-x^2+2x+1$ と $x$ 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，$C$ と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。線分 OP, OA と $C$ で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と $C$ で囲まれた図形の面積が等しいとき $m$ の値を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$とおくと，

$$l=a_1b_2-a_2b_1,\ m=b_1c_2-b_2c_1,\ n=c_1a_2-c_2a_1$$

このとき，$l\vec{c}=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1,\ c_2)=(a_1b_2c_1-a_2b_1c_1,\ a_1b_2c_2-a_2b_1c_2)$

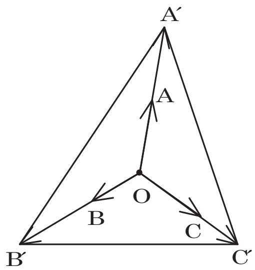
$$m\vec{a}=(b_1c_2-b_2c_1)(a_1,\ a_2)=(a_1b_1c_2-a_1b_2c_1,\ a_2b_1c_2-a_2b_2c_1)$$

$$n\vec{b}=(c_1a_2-c_2a_1)(b_1,\ b_2)=(a_2b_1c_1-a_1b_1c_2,\ a_2b_2c_1-a_1b_2c_2)$$

よって，$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$

(2)　$l>0$，$m>0$，$n>0$ より，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$はいずれも零ベクトルでもなく，しかもどの 2 つのベクトルも平行ではない。

さて，$m\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$n\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$l\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$とすると，(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+\overrightarrow{\mathrm{OB}'}+\overrightarrow{\mathrm{OC}'}=\vec{0}$ なので，点 O は△A′B′C′ の重心となる。そこで，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$とすると，




(i)　点 D が∠AOB の内部または辺上にあるとき
$r\geqq 0$, $s\geqq 0$ として，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}$と表せる。

(ii)　点 D が∠BOC の内部または辺上にあるとき
$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ として，$\vec{d}=s\vec{b}+t\vec{c}$と表せる。

(iii)　点 D が∠COA の内部または辺上にあるとき
$r\geqq 0$, $t\geqq 0$ として，$\vec{d}=r\vec{a}+t\vec{c}$と表せる。

(i)(ii)(iii)より，任意のベクトル$\vec{d}$は$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ $(r\geqq 0,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$と表せる。

## ［解 説］

(2)は，係数がすべて 0 以上を示すところがポイントです。そこで，(1)の結果を重心と結びつけてみました。

**2**

問題のページへ

(1)　$a_1$，$a_2$，…，$a_p$，$b_1$，$b_2$，…，$b_q$，$c_1$，$c_2$，…，$c_r$ を素数とし，$i_1$，…，$i_p$，$j_1$，…，$j_q$，$k_1$，…，$k_p$，$l_1$，…，$l_r$ を自然数として，

$$m = a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_p^{i_p}b_1^{j_1}b_2^{j_2}\cdots b_q^{j_q}\ ,\ \ n = a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_p^{k_p}c_1^{l_1}c_2^{l_2}\cdots c_r^{l_r}$$

このとき，$f(m) = a_1a_2\cdots a_pb_1b_2\cdots b_q$，$f(n) = a_1a_2\cdots a_pc_1c_2\cdots c_r$

$$f(d) = a_1a_2\cdots a_p\ ,\ \ f(mn) = a_1a_2\cdots a_pb_1b_2\cdots b_qc_1c_2\cdots c_r$$

よって，$f(d)f(mn) = f(m)f(n)$

(2)　$d$ の値が 1, 2, 4, 8 となる場合について，$m$, $n$ の値との関係をまとめると，右表のようになる。

| $n$ ＼ $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 6 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | 1 | 2 | | 2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 |
| 9 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 |
| 10 | 1 | 2 | 1 | 2 | | 2 | 1 | 2 | 1 | |

$f(mn) = f(m)f(n)$ となるのは，(1)より $f(d) = 1$，すなわち $d = 1$ となる場合で，その確率 $p_1$ は，

$$p_1 = \frac{63}{100}$$

$2f(mn) = f(m)f(n)$ となるのは，(1)より $f(d) = 2$，すなわち $d = 2,\ 4,\ 8$ となる場合で，その確率 $p_2$ は，

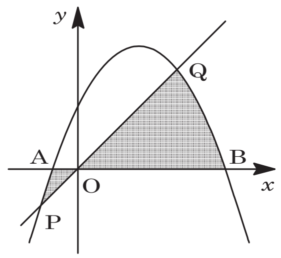
$$p_2 = \frac{19+3+1}{100} = \frac{23}{100}$$

## ［解 説］

素因数分解を自分で設定する箇所が鍵となります。証明ですので，アバウトすぎるのは禁物です。

## 3

問題のページへ




$C: y=-x^2+2x+1$ ……①，直線 $y=mx$ ……②に対して，

①と $x$ 軸との交点 A, B の $x$ 座標 $a$, $b$ は，$-x^2+2x+1=0$ より，$x=1\pm\sqrt{2}$ なので，$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$ となる。

①と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を $S_1$ とすると，

$$S_1=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$$

また，①と②の交点 P, Q の $x$ 座標 $\alpha$, $\beta$ は，$-x^2+2x+1=mx$ より，$x=\dfrac{-(m-2)\pm\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$ なので，

$$\alpha=\frac{-(m-2)-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2},\quad \beta=\frac{-(m-2)+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$

①と②で囲まれた部分の面積を $S_2$ とすると，

$$S_2=\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-mx)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$$

条件から，線分 OP, OA と $C$ で囲まれた図形の面積と，線分 OQ, OB と $C$ で囲まれた図形の面積が等しいことより，$S_1=S_2$ となる。

$$\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2},\ (m-2)^2+4=8,\ m-2=\pm2$$

$m\neq0$ より，$m=4$ である。

### [解 説]

$S_1=S_2$ が発見できれば，後はいわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる基本的な頻出問題です。