1　解答解説のページへ

a を正の実数，$w=a(\cos 5^\circ + i\sin 5^\circ)$ とする。ただし，i は虚数単位である。また，複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1=w$，$z_{n+1}=z_n w^{2n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ。

(2)　複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする。$1 \leqq n \leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ。

2

解答解説のページへ

(1)　$0<t<1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ。

(2)　k を正の定数とする。$a>0$ とし，曲線 $C: y=e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える。このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標はつねに正であることを示せ。

3

解答解説のページへ

(1)　$f(x)$を x の整式とし，$\{a_k\}$は $a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ および $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ を満たす数列とする。このとき $f(a_k)=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ ならば，$f(x)$は整式として 0 であることを示せ。

(2)　$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$を x の整式とし，

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x)\sin x + f_3(x)\sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする。このとき $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$は，いずれも整式として 0 であることを示せ。

4

解答解説のページへ

数列$\{a_k\}$が$a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$および

$$a_{kl} = a_k + a_l \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ l=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする。

(1)　$k,\ l$を 2 以上の自然数とする。自然数nが与えられたとき，$l^{m-1} \leqq k^n < l^m$を満たす自然数mが存在することを示せ。

(2)　$k,\ l$を 2 以上の自然数とするとき，$-\dfrac{1}{n} < \dfrac{a_k}{a_l} - \dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　$a_2 = a$とするとき，数列$\{a_k\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

(1)　平面上において座標軸に平行な主軸（長軸，短軸）をもち，x 軸，y 軸の両方に接する楕円を考える。その中心の x 座標を a とする。このような楕円のうち，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ。ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする。

(2)　(1)の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする。$\triangle$ABC の面積を $S(a)$ で表すとき，この関数のグラフをかけ。

1

問題のページへ

(1)　$z_{n+1}=z_nw^{2n+1}$ より, $n\geqq 2$ で,

$$z_n=z_1w^3w^5w^7\cdots w^{2n-1}=ww^3w^5w^7\cdots w^{2n-1}=w^{1+3+5+7+\cdots+2n-1}=w^{n^2}$$

これは $n=1$ のときも成立するので,

$$z_n=a^{n^2}\{\cos(5^\circ\times n^2)+i\sin(5^\circ\times n^2)\}$$

z_n が実数になるための必要十分条件は, k を整数として,

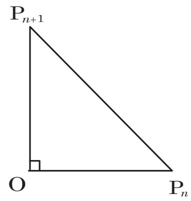
$$5^\circ\times n^2=180^\circ\times k,\quad n^2=36k$$

よって, n^2 は 36 の倍数より, n は 6 の倍数である。

(2)　$|z_{n+1}|=|z_nw^{2n+1}|=|z_n||w|^{2n+1}=a^{2n+1}|z_n|$ より, $\mathrm{OP}_{n+1}=a^{2n+1}\mathrm{OP}_n$

$\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となる場合を a の値で場合分けをする。

(i)　$a=1$ のとき



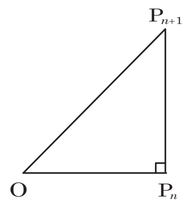
$\mathrm{OP}_{n+1}=\mathrm{OP}_n$ より, $\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=90^\circ$ となり,

$$w^{2n+1}=\cos 90^\circ\pm i\sin 90^\circ$$

よって, $5^\circ\times(2n+1)=\pm 90^\circ+360^\circ\times k$, $2n+1=\pm 18+72k$

これを満たす整数 n は存在しない。

(ii)　$a>1$ のとき



$\mathrm{OP}_{n+1}>\mathrm{OP}_n$ より, $\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}=90^\circ$ となり,

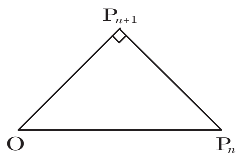
$$w^{2n+1}=\sqrt{2}(\cos 45^\circ\pm i\sin 45^\circ)$$

よって, $a^{2n+1}=\sqrt{2}$, $5^\circ\times(2n+1)=\pm 45^\circ+360^\circ\times k$

$$a=2^{\frac{1}{2(2n+1)}},\quad 2n+1=\pm 9+72k$$

$1\leqq n\leqq 17$ より $3\leqq 2n+1\leqq 35$ なので, $k=0$ で $n=4$, $a=2^{\frac{1}{18}}$ である。

(iii)　$0<a<1$ のとき



$\mathrm{OP}_{n+1}<\mathrm{OP}_n$ より, $\angle\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{P}_n=90^\circ$ となり,

$$w^{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ\pm i\sin 45^\circ)$$

よって, $a^{2n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $5^\circ\times(2n+1)=\pm 45^\circ+360^\circ\times k$

$$a=2^{\frac{1}{2(2n+1)}},\quad 2n+1=\pm 9+72k$$

(ii)と同様にすると, $k=0$ で $n=4$, $a=2^{-\frac{1}{18}}$ である。

［解 説］

(1)は(2)の誘導ではなく, お互い独立した問題です。(2)は w の絶対値で場合分けをすると, 直角二等辺三角形の配置が決まります。

2

問題のページへ

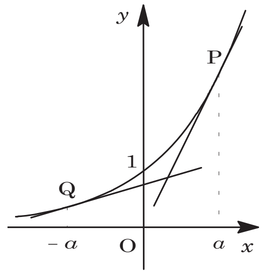
(1)　$f(t)=\dfrac{\log t}{2}+\dfrac{1-t}{1+t}$ とおくと,

$$f'(t)=\frac{1}{2t}+\frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2}=\frac{(1-t)^2}{2t(1+t)^2}$$

$0<t<1$ で $f'(t)>0$ より, $f(t)<f(1)=0$ となり, $\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つ。

(2)　$y=e^{kx}$ より, $y'=ke^{kx}$ なので, $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$ における接線は,

$$y-e^{ka}=ke^{ka}(x-a)\cdots\cdots\cdots①$$



$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ における接線は,

$$y-e^{-ka}=ke^{-ka}(x+a)\cdots\cdots\cdots②$$

①②の交点は, $ke^{ka}(x-a)+e^{ka}=ke^{-ka}(x+a)+e^{-ka}$

$$k(e^{2ka}-1)x=(ka-1)e^{2ka}+ka+1$$

$$x=\frac{(ka-1)e^{2ka}+ka+1}{k(e^{2ka}-1)}=\frac{(ka-1)+(ka+1)e^{-2ka}}{k(1-e^{-2ka})}$$

ここで, $e^{-2ka}=t$ とおくと, $k>0$, $a>0$ より $0<t<1$ となり, $ka=-\dfrac{\log t}{2}$ である。

$$x=\frac{\left(-\frac{\log t}{2}-1\right)+\left(-\frac{\log t}{2}+1\right)t}{k(1-t)}=\frac{-\frac{\log t}{2}(1+t)+(t-1)}{k(1-t)}$$

$$=\frac{1}{k}\left(-\frac{\log t}{2}\cdot\frac{1+t}{1-t}-1\right)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1+t}{1-t}\left(-\frac{\log t}{2}-\frac{1-t}{1+t}\right)$$

(1)から, $-\dfrac{\log t}{2}-\dfrac{1-t}{1+t}>0$ なので, $x>0$ となり, ①②の交点の x 座標はつねに正である。

［解 説］

(2)では, (1)の不等式が使えるようで使えない, 何か隔靴掻痒という感じがしました。このため, 時間がずいぶんかかってしまいました。

3

問題のページへ

(1)　n を自然数として，$f(x)$ を n 次式とすると，条件より，

$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ で，$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$ なので, k を定数として，

$$f(x) = k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

ここで，$x = a_{n+1} > a_n$ に対して，$f(a_{n+1}) = 0$ なので,

$$k(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\cdots(a_{n+1}-a_n) = 0$$

よって，$k=0$ となり，$f(x)=0$ である。

(2)　$F(x) = f_1(x) + f_2(x)\sin x + f_3(x)\sin 2x$ に対して，$a_k = k\pi$ とおくと,

$$F(a_k) = f_1(a_k) + f_2(a_k)\sin k\pi + f_3(a_k)\sin 2k\pi = f_1(a_k)$$

条件より，$F(a_k)=0$ なので $f_1(a_k)=0$ となり, (1)より $f_1(x)=0$ である。

$$F(x) = f_2(x)\sin x + f_3(x)\sin 2x$$

次に，$b_k = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ とおくと,

$$F(b_k) = f_2(b_k)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) + f_3(b_k)\sin(4k\pi+\pi) = f_2(b_k)$$

条件より，$F(b_k)=0$ なので $f_2(b_k)=0$ となり, (1)より $f_2(x)=0$ である。

$$F(x) = f_3(x)\sin 2x$$

さらに，$c_k = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}$ とおくと,

$$F(c_k) = f_3(c_k)\sin\left(4k\pi+\frac{\pi}{2}\right) = f_3(c_k)$$

条件より，$F(c_k)=0$ なので $f_3(c_k)=0$ となり, (1)より $f_3(x)=0$ である。

[解 説]

当然と思えることを証明するときは，気苦労が絶えません。この問題では，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ の条件が，とりたてて必要でもないので，なおさらです。

4

問題のページへ

(1)　$l \geqq 2$ より，$l^{m-1} \leqq k^n < l^m$ ……①から，$m-1 \leqq n\log_l k < m$ ………②

　$k \geqq 2$，$n \geqq 1$ より，$n\log_l k > 0$ なので，②を満たす自然数 m が存在する。すなわち，①を満たす自然数 m は存在する。

(2)　①より，$(m-1)\log l \leqq n\log k < m\log l$

　$\log l > 0$ より，$\dfrac{m-1}{n} \leqq \dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{m}{n}$ ………③

　さて，$a_{kl} = a_k + a_l$ において，$l = k$ とすると，$a_{k^2} = 2a_k$

$$a_{k^3} = a_{k^2} + a_k = 2a_k + a_k = 3a_k$$

　すると，帰納的に，$a_{k^n} = na_k$ となる。

　ここで，①と $a_k < a_{k+1}$ より，$a_{l^{m-1}} \leqq a_{k^n} < a_{l^m}$ となり，

$$(m-1)a_l \leqq na_k < ma_l$$

　さらに, $k \geqq 2$, $l \geqq 2$ より $kl > k$ なので，$a_k + a_l = a_{kl} > a_k$ から，$a_l > 0$ である。

　よって，$\dfrac{m-1}{n} \leqq \dfrac{a_k}{a_l} < \dfrac{m}{n}$ ………④

　③④より，$\dfrac{m-1}{n} - \dfrac{m}{n} < \dfrac{a_k}{a_l} - \dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{m}{n} - \dfrac{m-1}{n}$

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(3)　k, l と無関係などんな n に対しても，⑤が成立するので,

$$\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} = 0,\quad a_k = \frac{\log k}{\log l}a_l \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

　⑥に $l = 2$ を代入すると，$a_k = \dfrac{\log k}{\log 2}a_2 = a\log_2 k$

　これは，$a_k < a_{k+1}$ および $a_{kl} = a_k + a_l$ を満たしている。

［解 説］

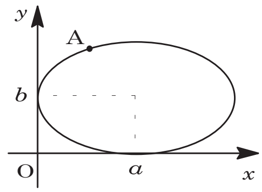
　与えられた漸化式をみて，対数関数のイメージをもつことができれば，証明のネックとなる④を導くことが可能です。それでも，本問がいちばんの難問であることは，変わりありません。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　楕円の中心を$(a,\ b)$とおくと, x軸, y軸の両方に接することより,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$$



A$(1,\ 2)$を通るので, $a>0$, $b>0$として,

$$\frac{(1-a)^2}{a^2}+\frac{(2-b)^2}{b^2}=1$$

$$\left(\frac{2-b}{b}\right)^2=1-\left(\frac{1-a}{a}\right)^2\cdots\cdots\cdots①$$

$b>0$のとき, $\dfrac{2-b}{b}=\dfrac{2}{b}-1\geqq-1$から$\left(\dfrac{2-b}{b}\right)^2\geqq0$となり, $-1\leqq\dfrac{1-a}{a}\leqq1$

$a>0$から, $-a\leqq1-a\leqq a$より, $a\geqq\dfrac{1}{2}$である。

(2)　①より, $\dfrac{4-4b+b^2}{b^2}=\dfrac{2a-1}{a^2}$で, $k=\dfrac{2a-1}{a^2}=\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{a^2}=-\left(\dfrac{1}{a}-1\right)^2+1$とおくと,

(1)より$a\geqq\dfrac{1}{2}$なので, $0<\dfrac{1}{a}\leqq2$から$0\leqq k\leqq1$……②となり,

$$4-4b+b^2=kb^2,\ (1-k)b^2-4b+4=0\cdots\cdots\cdots③$$

③を満たすbの値が2つ存在する条件は, $k\neq1$かつ$D/4=4-4(1-k)=4k>0$

②と合わせると$0<k<1$となり, $0<\dfrac{2a-1}{a^2}<1$より, $a>\dfrac{1}{2}$かつ$a\neq1$である。

このとき③の解は$b=\dfrac{2\pm2\sqrt{k}}{1-k}$なので, B$\left(a,\ \dfrac{2-2\sqrt{k}}{1-k}\right)$, C$\left(a,\ \dfrac{2+2\sqrt{k}}{1-k}\right)$より,

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{k}}{1-k}\cdot|a-1|=2|a-1|\frac{a\sqrt{2a-1}}{(1-a)^2}=\frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}$$

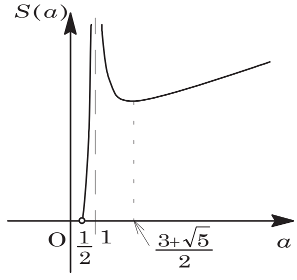
さて, $f(x)=\dfrac{2x\sqrt{2x-1}}{x-1}$とおくと,

$$f'(x)=\frac{2(x^2-3x+1)}{(x-1)^2\sqrt{2x-1}}$$

$f'(x)=0$の解は, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$となるので, $f(x)$の増減は右表のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	×	−	×	−	0	+
$f(x)$	0	↘	×	↘		↗

すると, $S(a)=|f(a)|$より, 右図が$S(a)$のグラフである。



［解 説］

計算量の多い問題です。$S(a)$のグラフの極小値は, すごい値になりましたので, 省略しました。