1

解答解説のページへ

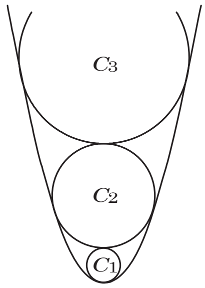
3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ に関して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための条件を，$f(x)$ の係数を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小になるとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また，$y=f(x)$ のグラフは平行移動によって $y=x^3+\dfrac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。

2

解答解説のページへ



座標平面上で不等式$y \geqq x^2$の表す領域を D とする。D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円をC_1とする。自然数 n について，円C_nが定まったとき，C_nの上部でC_nに外接する円で，D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円をC_{n+1}とする。C_nの半径をa_nとし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$とする。

(1)　a_1を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のときa_nをb_{n-1}で表せ。

(3)　a_nを n の式で表せ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。プレイヤーA, B がサイコロを交互に投げるゲームをする。最初は A が投げ, 先に 1 の目を出した方を勝ちとして終わる。ただし, A が n 回投げても勝負がつかない場合は B の勝ちとする。

(1) A の k 投目$(1 \leqq k \leqq n)$で A が勝つ確率を求めよ。

(2) このゲームにおいて A が勝つ確率 P_n を求めよ。

(3) $P_n > \dfrac{1}{2}$ となるような最小の n の値を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ より，$f'(x)=3x^2+6ax+b$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことより，

$D/4=9a^2-3b>0$，$3a^2>b$

(2)　点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m なので，

$$m=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^3-\alpha^3+3a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+3a(\beta+\alpha)+b=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+3a(\alpha+\beta)+b$$

α，β は $f'(x)=0$ の 2 つの解より，

$\alpha+\beta=-2a$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

よって，$m=4a^2-\dfrac{b}{3}-6a^2+b=-2a^2+\dfrac{2}{3}b$

さて，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動すると，

$$y=(x-p)^3+3a(x-p)^2+b(x-p)+c+q$$

$$=x^3+(-3p+3a)x^2+(3p^2-6ap+b)x-p^3+3ap^2-bp+c+q$$

ここで，$-3p+3a=0$ ……①，$-p^3+3ap^2-bp+c+q=0$ ……②とおくと，①より $p=a$，②に代入して $q=-2a^3+ba-c$ となる。

この p, q の値だけ，$y=f(x)$ のグラフを平行移動すると，

$$y=x^3+(-3a^2+b)x=x^3+\frac{3}{2}\left(-2a^2+\frac{2}{3}b\right)x=x^3+\frac{3}{2}mx$$

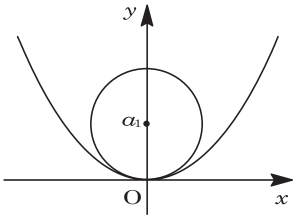
［解 説］

3 次関数のグラフの有名な性質を証明する問題です。工夫もせず，普通に計算を進めました。

© 電送数学舎 2004

2

問題のページへ



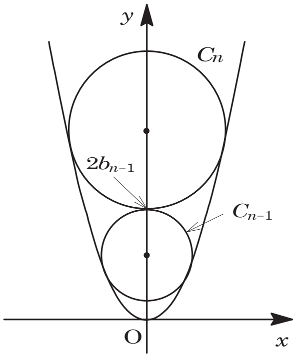
(1) 領域 D 内にあり，中心が y 軸上で原点を通る円の半径を r とすると，その方程式は，

$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

$y=x^2$ との共有点は，$y+(y-r)^2=r^2$

$$y^2+(1-2r)y=0,\ \ y=0,\ \ 2r-1$$

共有点は原点だけなので，$2r-1\leqq 0$ を満たす最大の r が a_1 となり，$a_1=\dfrac{1}{2}$ である。



(2) 条件より，円 C_n は半径 a_n，中心 $(0,\ 2b_{n-1}+a_n)$ となるので，その方程式は，

$$x^2+(y-2b_{n-1}-a_n)^2=a_n^{\ 2}$$

$y=x^2$ との共有点は，$y+(y-2b_{n-1}-a_n)^2=a_n^{\ 2}$

$$y^2+(-4b_{n-1}-2a_n+1)y+(4b_{n-1}^{\ 2}+4b_{n-1}a_n)=0$$

共有点の y 座標はただ 1 つなので，この 2 次方程式は重解をもち，$D=0$ となる。

$$(-4b_{n-1}-2a_n+1)^2-4(4b_{n-1}^{\ 2}+4b_{n-1}a_n)=0$$

よって，$4a_n^{\ 2}-4a_n-8b_{n-1}+1=0\ \ (n\geqq 2)$ ………①

$a_n>\dfrac{1}{2}$ より，$a_n=\dfrac{2+\sqrt{4-4(-8b_{n-1}+1)}}{4}=\dfrac{1+2\sqrt{2b_{n-1}}}{2}$

(3) ①より，$4a_{n+1}^{\ 2}-4a_{n+1}-8b_n+1=0\ \ (n\geqq 1)$ ………②

②−①より，$4(a_{n+1}^{\ 2}-a_n^{\ 2})-4(a_{n+1}-a_n)-8a_n=0$

$$(a_{n+1}^{\ 2}-a_n^{\ 2})-(a_{n+1}+a_n)=0,\ \ (a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+1}+a_n)=0$$

$a_{n+1}+a_n>0$ より，$a_{n+1}-a_n-1=0$，$a_{n+1}=a_n+1\ \ (n\geqq 2)$ ………③

さて，①に $n=2$ を代入し，$b_1=a_1=\dfrac{1}{2}$ を用いると，

$$4a_2^{\ 2}-4a_2-4+1=0,\ \ (2a_2+1)(2a_2-3)=0,\ \ a_2=\frac{3}{2}$$

よって，③より，$a_n=\dfrac{3}{2}+(n-2)=n-\dfrac{1}{2}$ （$n=1$ のときも満たす）

［解 説］

本問もまた有名な頻出問題の 1 つです。いろいろな解法がありますが，上の解はその 1 例です。

© 電送数学舎 2004

3

問題のページへ

(1)　A の k 投目で A が勝つのは，A と B がそれぞれ $k-1$ 回ずつ 1 以外の目を出した後, A が 1 の目を出す場合であり，その確率は，$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2(k-1)}$ である。

(2)　(1)より，$P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2(k-1)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right\}$

(3)　$P_n>\frac{1}{2}$ より，$\frac{6}{11}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right\}>\frac{1}{2}$，$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}>\frac{11}{12}$，$\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}<\frac{1}{12}$

すると，$2n(\log_{10}5-\log_{10}6)<-\log_{10}12$ ………(＊)

ここで，$\log_{10}5-\log_{10}6=(1-\log_{10}2)-(\log_{10}2+\log_{10}3)=-0.0791$

$\log_{10}12=2\log_{10}2+\log_{10}3=1.0791$

これより，(＊)を満たす n は，$n>\frac{1.0791}{2\times 0.0791}\fallingdotseq 6.82$ となり，n の最小の値は 7 である。

［解 説］

確率，数列，対数の融合問題ですが，内容は平易です。

© 電送数学舎 2004