

1

解答解説のページへ

 n を自然数とする。

- (1)
- n
- 個の複素数
- z_k
- (
- $k=1, 2, \dots, n$
-) が
- $0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$
- を満たすならば, 不等式

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$$

が成り立つことを示せ。

- (2)
- n
- 個の実数
- θ_k
- (
- $k=1, 2, \dots, n$
-) が

$$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$$

を満たすならば, 不等式

$$\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$$

が成り立つことを示せ。

2

解答解説のページへ

素数 p, q に対して, $a_n = p^n - 4(-q)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって整数 a_n を定める。ただし, $p > 2q$ とする。

- (1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば, $m = 3$ であることを示せ。
- (2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において、円周を n 等分する点 P_0, P_1, \dots, P_{n-1} を時計回りにとる。各 $i=1, 2, \dots, n$ に対して、直線 OP_{i-1}, OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}, P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし、 $P_n = P_0$ とする。放物線 C_1, C_2, \dots, C_n によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ。
- (2) $x_2 \neq a, x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ。
- (3) $0 \leq a \leq 1$ となるすべての a について $0 \leq x_n \leq 1$ ($n=2, 3, 4, \dots$) が成り立つような r の範囲を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面上に直線 $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) がある。不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \geq 1$ が表す領域を D , 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \leq 1$ が表す領域を D' とする。

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる。また D' 内に半径 r の 2 つの円 C'_1, C'_2 を, C'_1 は l と y 軸に接し, C'_2 は l と x 軸に接し, さらに C'_1 と C'_2 が外接するようにとる。

(1) $\frac{r}{R}$ を θ で表せ。

(2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)である n 個の複素数 z_k に対して、数学的帰納

法により、 $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$ が成立することを示す。

(i) $n = 1$ のとき 左辺 = $|z_1|^2$ = 右辺より、成立する。

(ii) $n = l$ のとき

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_l|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_l|^2$ の成立を仮定すると、

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_l|^2 + |z_{l+1}|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_l|^2 + |z_{l+1}|^2 \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

さて、 $|z_1 + z_2 + \dots + z_l + z_{l+1}|^2 = (z_1 + z_2 + \dots + z_l + z_{l+1})(\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_l + z_{l+1}})$

$$= |z_1 + z_2 + \dots + z_l|^2 + |z_{l+1}|^2 + \sum_{p=1}^l (z_p \overline{z_{l+1}} + \overline{z_p} z_{l+1})$$

ここで、 $z_p = r_p(\cos \theta_p + i \sin \theta_p)$ 、 $z_{l+1} = r_{l+1}(\cos \theta_{l+1} + i \sin \theta_{l+1})$ とおくと、

$$z_p \overline{z_{l+1}} = r_p r_{l+1} \{ \cos(\theta_p - \theta_{l+1}) + i \sin(\theta_p - \theta_{l+1}) \}$$

$$\overline{z_p} z_{l+1} = r_p r_{l+1} \{ \cos(-\theta_p + \theta_{l+1}) + i \sin(-\theta_p + \theta_{l+1}) \}$$

よって、 $z_p \overline{z_{l+1}} + \overline{z_p} z_{l+1} = 2r_p r_{l+1} \cos(\theta_p - \theta_{l+1})$

すると、 $0 \leq \theta_p \leq \frac{\pi}{2}$ 、 $0 \leq \theta_{l+1} \leq \frac{\pi}{2}$ から、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_p - \theta_{l+1} \leq \frac{\pi}{2}$ となることより、

$\cos(\theta_p - \theta_{l+1}) \geq 0$ 、すなわち $z_p \overline{z_{l+1}} + \overline{z_p} z_{l+1} \geq 0$ なので、

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_l|^2 + |z_{l+1}|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_l + z_{l+1}|^2 \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

①②より、 $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_l|^2 + |z_{l+1}|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_l + z_{l+1}|^2$

(i)(ii)より、 $n \geq 1$ で、 $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2 \dots \dots \dots \textcircled{3}$

(2) $z_k = \cos \theta_k + i \sin \theta_k$ とおくと、 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$ より、

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 1 + i(\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n)$$

$|z_k| = 1$ から、③にあてはめると、 $n \leq 1 + (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n)^2$

$$n - 1 \leq (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n)^2$$

ここで、 $0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \theta_k \geq 0$ となるので、

$$\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$$

[解説]

(1)の証明は、どんな方法を採用しようかと迷い、たいへん時間がかかりました。しかし、(2)は、(1)の命題に具体例を適用するだけで、あっさり解決しました。

2

問題のページへ

- (1) $a_1 = p + 4q$, $a_2 = p^2 - 4q^2$ の公約数を m とし, 整数 b_1, b_2 に対し, $a_1 = mb_1$, $a_2 = mb_2$ とすると,

$$p + 4q = mb_1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad p^2 - 4q^2 = mb_2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より } p = mb_1 - 4q, \textcircled{2} \text{に代入して } (mb_1 - 4q)^2 - 4q^2 = mb_2$$

$$12q^2 = m(b_2 - b_1^2 + 8b_1q) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて, 素数 p, q は $p > 2q$ を満たすので, p は 5 以上の奇数である。これより, $p + 4q$ は奇数となり, $\textcircled{1}$ より m は奇数である。

さらに, $\textcircled{3}$ より m は $12q^2 = 2^2 \times 3 \times q^2$ の約数であるので, $m > 1$ であれば, 奇数 m の値として, $m = 3, q, q^2, 3q, 3q^2 (q \neq 2)$ が考えられる。

ところが, $m = q, q^2, 3q, 3q^2$ のときは, $\textcircled{1}$ より p は q の倍数となり, 不適である。

以上より, $m > 1$ であれば, $m = 3$ である。

- (2) まず, $a_1 = (p + q) + 3q$ から, a_1 が 3 の倍数であるためには, $p + q$ が 3 の倍数であることが必要である。

逆に, $p + q$ が 3 の倍数とき, 任意の n に対して,

$$\begin{aligned} a_n &= p^n - 4(-q)^n = p^n - (3+1)(-q)^n = p^n - (-q)^n - 3(-q)^n \\ &= (p+q)\{p^{n-1} + p^{n-2}(-q) + \cdots + (-q)^{n-1}\} - 3(-q)^n \end{aligned}$$

これより, a_n はすべて 3 の倍数となるので, a_n が 3 の倍数である条件と, $p + q$ が 3 の倍数である条件は等しい。

さて, 素数 p, q は $p > 2q$ を満たすので, $p \geq 5, q \geq 2$ である。

そこで, $q = 2$ のときを考えると, $p + q$ が 3 の倍数となる最小の素数 p は 7 であり, このとき $pq = 14$ となる。

また, $q \geq 3$ のときは $p \geq 7$ から $pq \geq 21$ となり, これより積 pq が最小となる p, q は, $p = 7, q = 2$ である。

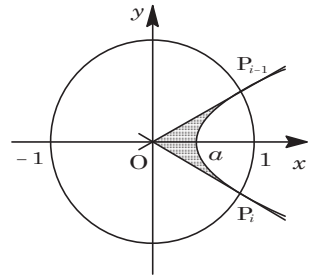
[解説]

(2)において, a_2 についても, $a_2 = p^2 - q^2 - 3q^2 = (p+q)(p-q) - 3q^2$ と変形し, 3 の倍数となる条件を考えています。

3

問題のページへ

$1 \leq i \leq n$ として、右図のように、 $P_{i-1}(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n})$,
 $P_i(\cos \frac{\pi}{n}, -\sin \frac{\pi}{n})$ とおく。



また、直線 OP_{i-1} , OP_i とそれぞれ点 P_{i-1} , P_i で接する
 放物線を $y^2 = 4p(x-a)$ ($p > 0$) とすると、点 P_{i-1} におけ
 る接線は、 $y \sin \frac{\pi}{n} = 2p(x-a + \cos \frac{\pi}{n} - a)$

$$y = \frac{2p}{\sin \frac{\pi}{n}} x + 2p \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n} - 2a}{\sin \frac{\pi}{n}} \dots\dots\dots ①$$

また、直線 OP_{i-1} は、 $y = x \tan \frac{\pi}{n} \dots\dots\dots ②$

①と②が一致することより、

$$\frac{2p}{\sin \frac{\pi}{n}} = \tan \frac{\pi}{n} \dots\dots\dots ③, \quad \cos \frac{\pi}{n} - 2a = 0 \dots\dots\dots ④$$

③より $p = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \dots\dots\dots ⑤$, ④より $a = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n} \dots\dots\dots ⑥$ となる。

このとき、直線 OP_{i-1} , OP_i と放物線によって囲まれた図形の面積を T_i とおくと、

$$T_i = 2 \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} - \int_a^{\cos \frac{\pi}{n}} y dx \right\}$$

ここで、 $n \geq 3$ なので、 $0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{3}$ となり、⑤⑥より、

$$\begin{aligned} \int_a^{\cos \frac{\pi}{n}} y dx &= \int_a^{\cos \frac{\pi}{n}} 2\sqrt{p}\sqrt{x-a} dx = 2\sqrt{p} \cdot \frac{2}{3} [(x-a)^{\frac{3}{2}}]_a^{\cos \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{p} (\cos \frac{\pi}{n} - a)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tan \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}} (\cos \frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n})^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos \frac{\pi}{n}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\cos \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

よって、 $T_i = \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} - \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$

すると、 $S_n = nT_i = \frac{n}{3} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{3}$

[解説]

ひねりはあるものの、やっとよく見かける問題に出会いました。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = rx(1-x)$ とおくと, $x_{n+1} = f(x_n) \cdots \cdots (*)$

さて, $x_1 = x_2 = a$ とすると, $a = f(a)$ であり, このとき (*) から, 帰納的に $x_n = a$ となるので, 求める a の条件は, $a = ra(1-a)$, $ra^2 - (r-1)a = 0$

よって, $r = 0$ のとき $a = 0$, $r \neq 0$ のとき $a = 0, \frac{r-1}{r}$ である。

(2) 条件より, $x_1 = x_3 = a$ のとき, $x_2 = b \neq a$ とおくと,

$x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ から,

$$b = f(a), \quad b = ra(1-a) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a = f(b), \quad a = rb(1-b) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より, } b - a = r(a - b) - r(a^2 - b^2)$$

$$b \neq a \text{ から, } -1 = r(1 - a - b), \quad 1 - a - b = -\frac{1}{r} \quad (r \neq 0)$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して, } 1 - a - ra(1 - a) = -\frac{1}{r}, \quad ra^2 - (r+1)a + 1 + \frac{1}{r} = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$D = (r+1)^2 - 4r\left(1 + \frac{1}{r}\right) = r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで, $b \neq a$ すなわち $ra(1-a) \neq a$ という条件は, (1) より $a \neq 0$, $a \neq \frac{r-1}{r}$ に対応する。 $a = 0$ では, $\textcircled{3}$ は $1 + \frac{1}{r} = 0$, $r = -1$ となるが, このとき $\textcircled{3}$ は重解をもち,

$b \neq a$ を満たす a はない。 $a = \frac{r-1}{r}$ では, $r \cdot \frac{(r-1)^2}{r^2} - (r+1) \cdot \frac{r-1}{r} + 1 + \frac{1}{r} = 0$ から $r = 3$ となるが, このときも $\textcircled{3}$ は重解をもち, $b \neq a$ を満たす a はない。

したがって, $r = 0$ のときも含めて, $\textcircled{4}$ から, $-1 \leq r \leq 3$ のとき a は存在しない。また, $r < -1$, $3 < r$ のとき a は 2 個存在する。

(3) まず, $0 \leq a \leq 1$ となる a に対して, $0 \leq x_2 \leq 1$ が必要なので, (2) と同様に考えて,

$$b = f(a) = ra(1-a) = -ra^2 + ra = -r\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}r$$

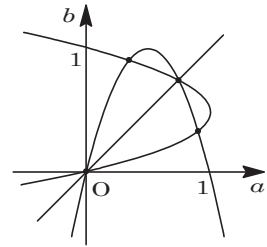
$r < 0$ では, 明らかに $b < 0$ となる a が存在し, 不適である。

$r \geq 0$ では, 求める条件は $0 \leq \frac{1}{4}r \leq 1$, すなわち $0 \leq r \leq 4$ である。

逆に $0 \leq r \leq 4$ のとき, (*) から帰納的に, どんな n に対しても $0 \leq x_n \leq 1$ となるので, 求める条件は $0 \leq r \leq 4$ である。

[解説]

(2) では, $r > 0$ のときの 1 例を図に示しました。2 つの放物線 $b = f(a)$ と $a = f(b)$ の $b \neq a$ である共有点の個数を求めるということに注目して解いています。

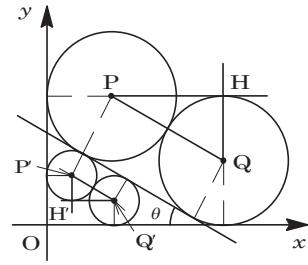


5

問題のページへ

- (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から、直線 $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ の上向きの法線ベクトルの成分を $(\sin \theta, \cos \theta)$ とすることができるので、これより l の右向き方向ベクトルの成分は $(\cos \theta, -\sin \theta)$ となる。

さて、半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ P, Q とおき、 P を通り x 軸に平行な直線と、 Q を通り y 軸に平行な直線との交点を H とおくと、 $PQ = 2R$ 、 $\angle QPH = \theta$ となる。



すると、点 P の座標は $P(R, 2R \sin \theta + R)$ となり、直線 l との距離が R なので、

$$\frac{R \sin \theta + (2R \sin \theta + R) \cos \theta - 1}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = R$$

$$R(\sin \theta + \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) - 1 = R \text{ より, } R = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}$$

同様に、図のように点 P', Q', H' を設定すると、 $P'(r, 2r \sin \theta + r)$ となり、

$$\frac{-\{r \sin \theta + (2r \sin \theta + r) \cos \theta - 1\}}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = r$$

$$-r(\sin \theta + \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) + 1 = r \text{ より, } r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + 1}$$

$$\text{以上より, } \frac{r}{R} = \frac{\sin \theta + \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta + \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + 1}$$

- (2) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと、 $t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ より、 $2 \sin \theta \cos \theta = t^2 - 1$
 また、 $t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ となり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $1 < t \leq \sqrt{2}$ である。

ここで、 $\frac{r}{R} = f(t)$ とおくと、(1)より、

$$f(t) = \frac{t + t^2 - 2}{t + t^2} = 1 - \frac{2}{t + t^2}$$

すると、 $1 < t \leq \sqrt{2}$ で、 $f'(t) = \frac{2(2t+1)}{(t+t^2)^2} > 0$ より、 $f(t)$ は単調増加し、

$$f(1) < f(t) \leq f(\sqrt{2})$$

よって、 $f(1) = 0$ 、 $f(\sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2}$ より、 $0 < \frac{r}{R} \leq -1 + \sqrt{2}$ である。

[解説]

(1)はいろいろな解法が考えられます。最初に考えたのは、直線 l の x 切片と y 切片の間の距離を R と θ で表すものでした。しかし、計算が複雑になりすぎ、次に考えたのが上に記した解法です。