$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 不等式$10^{2x} \leqq 10^{6-x}$を満たす実数xの範囲を求めよ。

(2) $10^{2x} \leqq y \leqq 10^{5x}$と$y \leqq 10^{6-x}$を同時に満たす整数の組$(x,\ y)$の個数を求めよ。

2

解答解説のページへ

$f(x)=2x^3+x^2-3$とおく。

(1)　関数$f(x)$の増減表を作り，$y=f(x)$のグラフの概形を描け。

(2)　直線$y=mx$が曲線$y=f(x)$と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=\frac{1}{3},\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定め，数列$\{b_n\}$を

$$b_1=a_1a_2,\ b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　一般項a_nをnを用いて表せ。

(2)　一般項b_nをnを用いて表せ。

1

問題のページへ

(1) 条件より，$10^{2x} \leqq 10^{6-x}$ から，$2x \leqq 6-x$

よって，$x \leqq 2$

(2) 条件より，$10^{2x} \leqq y \leqq 10^{5x}$ ………①，$y \leqq 10^{6-x}$ ………②

まず，①を満たす y が存在するためには $10^{2x} \leqq 10^{5x}$ が必要であり，

$2x \leqq 5x$，$0 \leqq x$

また，①②を満たす y が存在するためには，$10^{2x} \leqq 10^{6-x}$ が必要であり，(1)から，

$x \leqq 2$

まとめると，$0 \leqq x \leqq 2$ となり，x は整数なので，$x = 0$，1，2

(i) $x = 0$ のとき

①より $y = 1$，②より $y \leqq 10^6$ から $y = 1$ のみとなり，$(x,\ y)$ の個数は 1 である。

(ii) $x = 1$ のとき

①より $10^2 \leqq y \leqq 10^5$，②より $y \leqq 10^5$ から $10^2 \leqq y \leqq 10^5$ となり，$(x,\ y)$ の個数は $10^5 - 10^2 + 1 = 99901$ である。

(iii) $x = 2$ のとき

①より $10^4 \leqq y \leqq 10^{10}$，②より $y \leqq 10^4$ から $y = 10^4$ のみとなり，$(x,\ y)$ の個数は 1 である。

(i)〜(iii)より，$(x,\ y)$ の個数は，$1 + 99901 + 1 = 99903$ である。

［解　説］

(2)の必要条件の 1 つを求めるために，(1)の設問のあることがわかります。

2

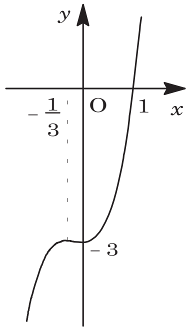
問題のページへ

(1)　$f(x)=2x^3+x^2-3$ より，

$$f'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{80}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$



(2)　点 $(t,\ 2t^3+t^2-3)$ における接線は，

$$y-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(x-t)$$

原点を通るとき，

$$-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(-t)$$

$$4t^3+t^2+3=0,\ (t+1)(4t^2-3t+3)=0$$

ここで，$4t^2-3t+3=0$ は $D=9-48<0$ より実数解をもたないので，$t=-1$ である。

このとき，接線は $y=4x$ であるので，図より，直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲は，$m>4$ である。

[解 説]

教科書の例題にあるような落とすことのできない問題です。

3

問題のページへ

(1)　$a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$ より，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は等差数列なので,

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)=n+2,\quad a_n=\frac{1}{n+2}$$

(2)　条件より，$b_1=a_1a_2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

また，$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}$ から，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}$ となり, $n\geqq 2$ のとき,

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+3)(k+4)}=\frac{1}{12}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{n}{3(n+3)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお, $(*)$は $n=1$ のときも成立しているので,

$$b_n=\frac{n}{3(n+3)}$$

［解 説］

基本的な漸化式を解く問題です。どちらも教科書の記述範囲です。