1　　解答解説のページへ

a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

自然数 m, n と $0<a<1$ を満たす実数 a を，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 m, n を求めよ。

(2)　不等式 $a>\frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上の点 A$(1,\ 2)$ を通る直線 l が x 軸, y 軸とそれぞれ点 P, Q で交わるとする。点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たすようにとる。ただし, O は xy 平面の原点である。このとき, 直線 l の傾きにかかわらず, 点 R はある関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。関数 $f(x)$ を求めよ。

1

問題のページへ

$f(x)=x^3-3ax+a$ より，$f'(x)=3x^2-3a$ となる。

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調に増加する。これより，$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(0)=a\geqq 0$$

よって, $a\leqq 0$ から，$a=0$ となる。

(ii)　$a>0$ のとき

$$f'(x)=3(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii−i)　$0<\sqrt{a}\leqq 1\,(0<a\leqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+a\geqq 0,\ 2\sqrt{a}\leqq 1$$

すると，$a\leqq\dfrac{1}{4}$ となり，$0<a\leqq 1$ から $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ である。

(ii−ii)　$\sqrt{a}>1\,(a>1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(1)=1-2a\geqq 0$$

すると，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，$a>1$ から解なし。

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}$

［解　説］

参考書の例題に掲載されているような 3 次関数の増減についての基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $0<a<1$ より，$n<n+a<n+1$ となり，

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+a}<\frac{1}{n}<1$$

すると，$\log_2 6=m+\dfrac{1}{n+a}$ から, m は $\log_2 6$ の整数部分である。

ここで，$\log_2 2^2<\log_2 6<\log_2 2^3$ から $2<\log_2 6<3$ となることより，

$$m=2$$

このとき，$\log_2 6-2=\dfrac{1}{n+a}$ から，

$$\log_2\frac{3}{2}=\frac{1}{n+a},\quad n+a=\frac{1}{\log_2\frac{3}{2}}=\log_{\frac{3}{2}}2$$

すると, $0<a<1$ から, n は $\log_{\frac{3}{2}}2$ の整数部分である。

そこで，$\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3}{2}<\log_{\frac{3}{2}}2<\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ から $1<\log_{\frac{3}{2}}2<2$ となることより，

$$n=1$$

(2) (1)から，$a=\log_{\frac{3}{2}}2-1=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{4}{3}$ ………①

ここで，$2^2\cdot 4^3>3^5$ より，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^3>\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$，$\dfrac{4}{3}>\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ………②

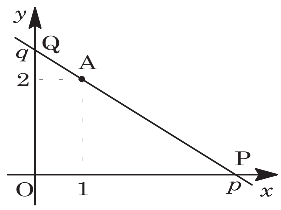
①②より，$a>\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ である。

［解　説］

対数の値を評価する問題です。結論を見据えながら式変形を行います。たとえば, 不等式 $2^2\cdot 4^3>3^5$ はその 1 例です。

3

問題のページへ



点 P, Q を P$(p,\ 0)$，Q$(0,\ q)$ とおく。

(i)　$pq \neq 0$ のとき

直線 l の方程式は，$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$

A$(1,\ 2)$ を通ることより，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{q}=1$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(p-1,\ q-2)$ となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(x,\ y)$ とおくと，

$x=p-1$ ………②，$y=q-2$ ………③

②③を①に代入すると，$x\neq-1$，$y\neq-2$ のもとで，

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y+2}=1$，$y+2=\dfrac{2(x+1)}{x}$，$y=\dfrac{2}{x}$ ………④

(ii)　$pq=0$ のとき

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{0}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ -2)$

すると，$(x,\ y)=(-1,\ -2)$ となり，④を満たしている。

(i)(ii)より，点 R は曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ 上にあるので，$f(x)=\dfrac{2}{x}$ である。

［解　説］

点 R の軌跡の方程式を求める問題です。パラメータ $p,\ q$ を消去すれば OK です。