1

解答解説のページへ

曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，$\cdots$ とし，第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_n の x 座標を求めよ。また，点 A_n において，曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ。

(2)　線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y = x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P$'$ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

3

解答解説のページへ

$x,\ y$ を変数とする。

(1)　n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 $a,\ b$ を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}=\frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2)　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

4

解答解説のページへ

三角形 OAB の辺 OA, OB 上に，それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$$

とする。三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また，その条件を満たす点$(a,\ b)$はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし，三角形 OPQ の辺上の点は，三角形 OPQ の内部に含まれないと考える。

5

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{QPC}$，$\angle\mathrm{PQC} = \angle\mathrm{RQD}$，$\angle\mathrm{QRD} = \angle\mathrm{SRA}$ となるようにとる。ただし，点 P，Q，R，S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1) $y = x\sin^2 x$ ……①，$y = x$ ……②に対して，x 座標が正の共有点は，

$$x\sin^2 x = x\,,\ \ \sin^2 x = 1\,,\ \ \sin x = \pm 1$$

これより，$x_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$x_{n+1} = x_n + \pi$ となり，

$$x_n = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$$

さて，①より，$y' = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x = \sin^2 x + x\sin 2x$

そこで，$x = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ において，

$$y' = \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\sin(2n-1)\pi = (\pm 1)^2 = 1$$

よって，曲線①と直線②は，点 A_n において接している。

(2) $0 \leqq \sin^2 x \leqq 1$ から，$x > 0$ において $x\sin^2 x \leqq x$ となり，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線①で囲まれる部分の面積 S は，

$$S = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x\sin^2 x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} x(1 + \cos 2x)\,dx$$

ここで，(1)より，$x_n = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$，$x_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ なので，

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = \frac{1}{2}({x_{n+1}}^2 - {x_n}^2) = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2n\pi\cdot\pi = n\pi^2$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} x\cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_{x_n}^{x_{n+1}} - \frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x_{n+1}\sin 2x_{n+1} - x_n\sin 2x_n) + \frac{1}{4}\Big[\cos 2x\Big]_{x_n}^{x_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2x_{n+1} - \cos 2x_n) = \frac{1}{4}(\cos(2n+1)\pi - \cos(2n-1)\pi)$$

$$= \frac{1}{4}(-1 + 1) = 0$$

したがって，$S = \dfrac{1}{2}n\pi^2$ である。

［解 説］

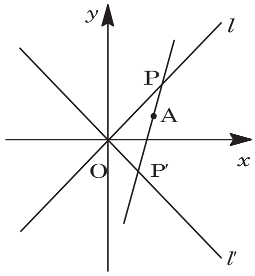
微積分の総合問題です。曲線①と直線②の位置関係は明らかなので，図を描くまでもありません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

$\mathrm{P}(p,\ p)$，$\mathrm{P}'(p',\ -p')$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$より，

$$p+p'=a+x,\ \ p-p'=b+y$$



よって，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+x+y)$ ………①

$$p'=\frac{1}{2}(a-b+x-y)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また, kを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}'}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$より，

$$(p'-a,\ -p'-b)=k(p-a,\ p-b)$$

よって，$(p'-a)(p-b)+(p'+b)(p-a)=0$ ………③

①②を③に代入して，

$$\frac{1}{4}(-a-b+x-y)(a-b+x+y)+\frac{1}{4}(a+b+x-y)(-a+b+x+y)=0$$

$$(x-b)^2-(y+a)^2+(x+b)^2-(y-a)^2=0$$

まとめると，$x^2-y^2=a^2-b^2$

点$\mathrm{A}(a,\ b)$は$y=x$，$y=-x$上にないことより，$b\neq\pm a$から$a^2-b^2\neq 0$であり，

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$$

したがって, 点Qの軌跡は$l: y=x$と$l': y=-x$を漸近線とする双曲線となる。

［解 説］

文系にlとl'がx軸, y軸となっている類題が出ています。しかし, 本問に出合ったとき, 座標系の回転を思いつくのは, 容易なことではありません。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$n+1=a(y+n+1)+by$，$n+1=(a+b)y+a(n+1)$

任意の y に対して成立する条件は，$a+b=0$，$a(n+1)=n+1$ となり，

$a=1$，$b=-1$

(2) $\dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……①の成立を数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

①の左辺 $=\dfrac{1}{x(x+1)}$，①の右辺 $=\dfrac{{}_1\mathrm{C}_0}{x}-\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{x+1}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

よって，$n=1$ のとき成立する。

(ii) $n=k$ のとき

$\dfrac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}=\displaystyle\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\dfrac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……②の成立を仮定する。

ここで，$(k+1)!=(k+1)k!$ を用いると，(1)および②より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}-\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}\\&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}-\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}\ \cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

さて，いったん $r+1=s$ とおきかえると，

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}=\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}\frac{{}_k\mathrm{C}_{s-1}}{x+s}=-\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}+\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\\&=\frac{{}_k\mathrm{C}_0}{x}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{{}_k\mathrm{C}_k}{x+k+1}\\&=\frac{1}{x}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{1}{x+k+1}\\&=\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のとき，①は成立する。

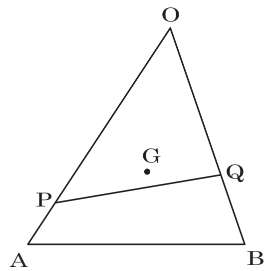
(i)(ii)より，すべての自然数 n について，①は成立する。

［解 説］

数学的帰納法による証明において，式変形を進めると，(1)の恒等式だけでなく，二項係数の関係 ${}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}={}_{k+1}\mathrm{C}_r$ を利用するという方針が見えてきます。

4

問題のページへ



条件より，点 G は$\triangle$OABの重心であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3a}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{3b}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

Gが$\triangle$OPQの内部に含まれるための必要十分条件は，

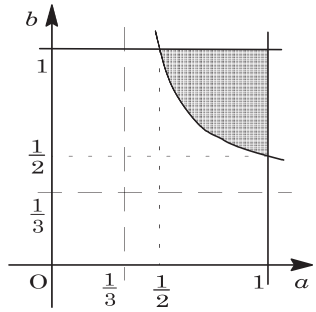
$$\frac{1}{3a}>0,\ \frac{1}{3b}>0,\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}<1$$

$0<a<1$，$0<b<1$より，$\frac{1}{3a}>0$，$\frac{1}{3b}>0$は成立し，

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}<1$$

変形すると，$\frac{1}{3b}<\frac{3a-1}{3a}$となり，$3a-1>0$のもとで，

$$b>\frac{a}{3a-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3a-1)}$$

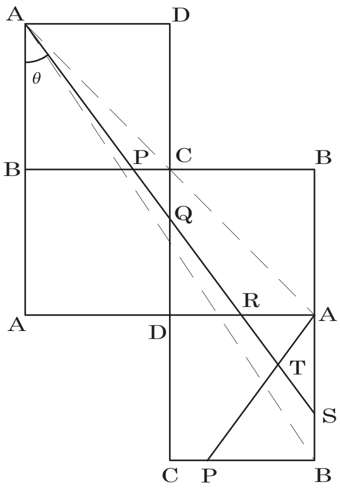


よって，点$(a,\ b)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解 説］

まったく同じ問題を解いたことのあるような感じがします。単なる既視感かもしれませんが。

$\boxed{5}$ 問題のページへ



(1) 右図のように，正方形 ABCD を辺 BC，CD，DA に関して，順に折り返していく。すると，条件より，折れ線 APQRS は 1 本の直線になる。

さて，点 S が辺 AB 上にあるとき，点 P, Q, R は，それぞれ辺 BC, CD, DA 上に存在する。

ここで，点 S が点 A と一致するとき $\mathrm{BP}=1$，点 S が点 B と一致するとき $\mathrm{BP}=\dfrac{2}{3}$ となり，求める条件は，$\mathrm{BP}=t$ から $\dfrac{2}{3}<t<1$ である。

(2) まず，$\angle\mathrm{BAP}=\theta$ とおくと，$\tan\theta=t$ となる。

そこで，$\angle\mathrm{CQP}=\angle\mathrm{DQR}=\angle\mathrm{ASR}=\theta$ から，

$$\mathrm{CP}=1-t,\ \mathrm{CQ}=\frac{1-t}{\tan\theta}=\frac{1-t}{t}$$

$$\mathrm{DQ}=1-\frac{1-t}{t}=\frac{2t-1}{t},\ \mathrm{DR}=\frac{2t-1}{t}\tan\theta=2t-1,\ \mathrm{AR}=1-(2t-1)=2-2t$$

これより，$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot t=\dfrac{t}{2}$，$\triangle\mathrm{PCQ}=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{(1-t)^2}{2t}$

$$\triangle\mathrm{QDR}=\frac{1}{2}(2t-1)\cdot\frac{2t-1}{t}=\frac{(2t-1)^2}{2t}$$

また，RS と AP の交点を T とするとき，$\angle\mathrm{TAS}=\angle\mathrm{TSA}=\theta$ から，$\triangle\mathrm{TAS}$ は二等辺三角形となり，T から AR への垂線の長さは，AS の $\dfrac{1}{2}$ であるので，

$$\mathrm{AS}=\frac{2-2t}{\tan\theta}=\frac{2-2t}{t},\ \triangle\mathrm{RAT}=\frac{1}{2}(2-2t)\cdot\frac{2-2t}{2t}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

したがって，四角形 PQRT の面積 $f(t)$ は，

$$f(t)=1-\frac{t}{2}-\frac{(1-t)^2}{2t}-\frac{(2t-1)^2}{2t}-\frac{(1-t)^2}{t}=1-\frac{t^2+3(1-t)^2+(2t-1)^2}{2t}$$

$$=1-\frac{4t^2-5t+2}{t}=\frac{-4t^2+6t-2}{t}=6-\left(4t+\frac{2}{t}\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$4t+\dfrac{2}{t}\geqq2\sqrt{4t\cdot\dfrac{2}{t}}=4\sqrt{2}$

等号成立は $4t=\dfrac{2}{t}$ のときであり，$\dfrac{2}{3}<t<1$ から $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の場合となる。

以上より，$f(t)$ の最大値は $6-4\sqrt{2}$ である。

［解 説］

有名な反射の問題です。上の解のように折り返しを利用するのが常套手段です。なお，平行四辺形 PQRT の面積は，まわりの三角形を除く方針で計算しています。