1

解答解説のページへ

xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき，k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ，第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1)　$G=3$ となる確率を n の式で表せ。

(2)　G の期待値を n の式で表せ。

3

解答解説のページへ

xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

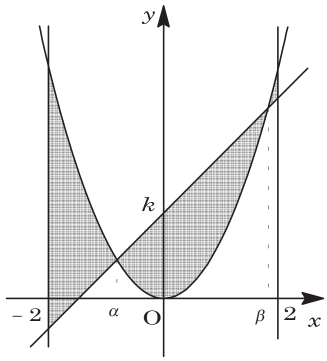
以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2$ と $l: y=x+k$ の共有点の x 座標は,

$$x^2=x+k,\ x^2-x-k=0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より, $(*)$の異なる 2 つの実数解が, ともに $-2<x<2$ に存在するので,

$$D=1+4k>0,\ k>-\frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ①$$

$f(x)=x^2-x-k$ として,

$$f(2)=4-2-k>0,\ k<2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(-2)=4+2-k>0,\ k<6 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②③より, $-\frac{1}{4}<k<2$

(2)　$(*)$より, $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$ となり, この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

すると, 求める 3 つの部分の面積の和 S は,

$$S=\int_{-2}^{\alpha}(x^2-x-k)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx+\int_{\beta}^{2}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^2-x-k)\,dx-2\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{16}{3}-4k+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+4k}\right)^3$$

［解 説］

積分計算がポイントです。計算を迅速にかつ正確に遂行するためには, 上記のような工夫が必要になります。

2

問題のページへ

(1)　$G=k\ (1\leqq k\leqq 6)$ となる確率を p_k とおく。

　さて，$G=3$ となるのは，3 または 6 だけが n 回出て，しかも 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_3=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　(i)　$G=6$ のとき　6 が n 回出る場合より，その確率は $p_6=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(ii)　$G=5$ のとき　5 が n 回出る場合より，その確率は $p_5=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iii)　$G=4$ のとき　4 が n 回出る場合より，その確率は $p_4=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iv)　$G=3$ のとき　(1)より，$p_3=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(v)　$G=2$ のとき

　2, 4, 6 だけが n 回出て，しかも 4 が続けて n 回出ない，さらに 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_2=\left(\frac{3}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(vi)　$G=1$ のとき

　(i)～(v)の余事象を考えると，その確率は，

$$p_1=1-\left\{3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i)～(vi)より，G の期待値は，

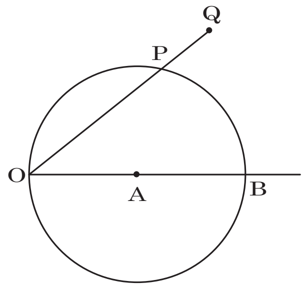
$$\begin{aligned}&6p_6+5p_5+4p_4+3p_3+2p_2+p_1\\&=(6+5+4)\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\end{aligned}$$

［解 説］

　具体的に考えないとミスをしそうな問題です。特に $G=2$ のときが，注意力を要求されます。

3

問題のページへ



(1)　条件(a)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(k>0)$

条件(b)に代入すると, $k>0$ より $k|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = 1$

これより，$k = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，点 P は OB を直径とする円 C 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = 0$

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2} = 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 1 \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 2r$ なので，③より，

$$2r|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta = 1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta = \frac{1}{2r}$$

以上より，半直線 OB 上に $\mathrm{OH} = \dfrac{1}{2r}$ となる点 H をとると，点 Q は点 H を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2)　l が C と 2 点で交わる条件は, $\mathrm{OH} < \mathrm{OB}$ である。

すると，$\dfrac{1}{2r} < 2r$ から，$r > \dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

③式は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の OB 方向への正射影ベクトルの大きさが一定という意味でとらえました。なお，原点を O, x 軸を直線 OA とする座標系を導入する方法もあります。