1

解答解説のページへ

点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60°$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また, 2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s, 線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A, B と C, D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α，β，γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a の式で表せ。

(2)　α，β，γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。

3

解答解説のページへ

a を正の定数とし,

$$f(x)=\left|\,|x-3a|-a\,\right|,\quad g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a$$

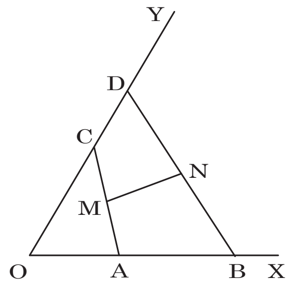
を考える。

(1) 方程式 $f(x)=a$ の解を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\right)$

$$=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

よって，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2)　$s^2+t^2=1$ $(s>0,\ t>0)$ より，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$s^2+st+t^2=1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

すると，$\sin 2\theta=1$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき，s^2+st+t^2 は最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

よって，(1)より，MN の最大値は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの基本題です。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の表現がポイントとなっています。なお，(2)では，相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ に対して，$P(x)=0$ の解が α，β，γ であるので，

$$\alpha+\beta+\gamma=-3a \cdots\cdots ①,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3a \cdots\cdots ②,\ \alpha\beta\gamma=-b \cdots\cdots ③$$

条件より，$\alpha+\gamma=2\beta \cdots\cdots ④$

①④より，$\beta=-a \cdots\cdots ⑤$となり，また②④より，$2\beta^2+\gamma\alpha=3a \cdots\cdots ⑥$

⑤⑥より，$2a^2+\gamma\alpha=3a$，$\gamma\alpha=-2a^2+3a \cdots\cdots ⑦$

③⑤⑦より，$-a(-2a^2+3a)=-b$，$b=-2a^3+3a^2$

(2)　⑤より β は実数であるので，α，γ がともに実数である条件を求める。

④⑤より，$\alpha+\gamma=-2a$

さらに，⑦を考え合わせると，α，γ は t の 2 次方程式 $t^2+2at-2a^2+3a=0$ の 2 つの解となるので，

$$D/4=a^2-(-2a^2+3a)=3a(a-1)\geqq 0$$

よって，$a\leqq 0,\ 1\leqq a$ である。

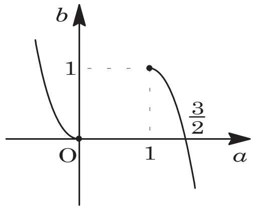
(3)　(1)より，$f(a)=-2a^3+3a^2$ となり，

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右上表のようになる。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって，(2)から $a\leqq 0,\ 1\leqq a$ において，$b=f(a)$ のグラフは右図のとおりである。



［解 説］

3 次方程式の解と係数の関係を題材にした問題です。連立方程式のまとめ方が問われています。

3

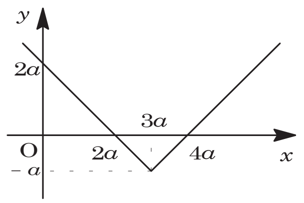
問題のページへ

(1)　$h(x) = |x-3a| - a$ とおくと，

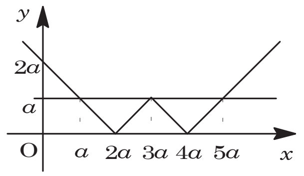
$$h(x) = -x + 2a \ (x < 3a)$$

$$h(x) = x - 4a \ (x \geqq 3a)$$

よって，$y = h(x)$ のグラフは右図のようになる。



さて，$f(x) = |h(x)|$ より，$y = f(x)$ のグラフは，右下図のようになり，$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ との共有点を考えると，方程式 $f(x) = a$ の解は，

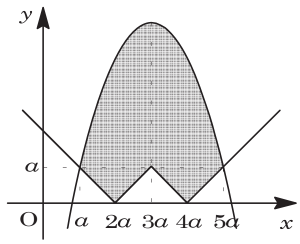


$$x = a,\ 3a,\ 5a$$

(2)　$g(x) = -x^2 + 6ax - 5a^2 + a = -(x-3a)^2 + 4a^2 + a$

また，$g(a) = g(5a) = a$ である。

これより，$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S は，



$$S = \int_a^{5a} (-x^2 + 6ax - 5a^2 + a - a)\,dx + \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \cdot 2$$

$$= -\int_a^{5a} (x-a)(x-5a)\,dx + 2a^2$$

$$= \frac{1}{6}(5a-a)^3 + 2a^2 = \frac{32}{3}a^3 + 2a^2$$

［解 説］

センターレベルの微積分の基本題です。計算も容易です。