

1

解答解説のページへ

2 次の正方行列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ を

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 O は 2 次の零行列、 B と C は 2 次の正方行列とする。

- (1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表せ。ここで E は 2 次の単位行列とする。
- (2) B と C を、 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、 A_{3n} を求めよ。

2

解答解説のページへ

点 O で交わる 2 つの半直線 OX , OY があって $\angle XOY = 60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に、また、2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして、線分 AC の中点を M , 線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s , 線分 CD の長さを t とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。
- (2) 点 A, B と C, D が、 $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき、線分 MN の長さの最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

N を 2 以上の自然数とする。

(1) 関数 $f(x) = (N - x) \log x$ を $1 \leq x \leq N$ の範囲で考える。このとき、曲線 $y = f(x)$ は上に凸であり、関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる。このことを示せ。

(2) 自然数の列 a_1, a_2, \dots, a_N を

$$a_n = n^{N-n} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

で定める。 a_1, a_2, \dots, a_N のうちで最大の値を M とし、 $M = a_n$ となる n の個数を k とする。このとき $k \leq 2$ であることを示せ。

(3) (2) で $k = 2$ となるのは、 N が 2 のときだけであることを示せ。

4

解答解説のページへ

t を負の実数とし, xy 平面上で曲線 $y = 2^{2x+2t}$ と $y = 2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする。

- (1) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ。
- (2) t が負の実数の範囲を動くとき, $V(t)$ の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い、表が 500 回続けて出たときに終わるものとする。 n を 500 以上の自然数とすると、この反復試行が n 回で終わる確率を $p(n)$ とする。

- (1) $501 \leq n \leq 1000$ のとき、 $p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し、またその値を求めよ。
- (2) $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ。
- (3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき、 $p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 条件より, $A_0 = O$, $A_1 = B + A_0C = B$

$$A_2 = B + A_1C = B + BC = B(E + C)$$

$$A_3 = B + A_2C = B + B(E + C)C = B(E + C + C^2)$$

これより, $n \geq 1$ のとき, $A_n = B(E + C + \dots + C^{n-1}) \dots \dots \textcircled{1}$ と推測できる。ただし, $C^0 = E$ とする。以下, $\textcircled{1}$ を数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$ のとき $A_1 = B = BE$ より成立する。(ii) $n = k$ のとき $A_k = B(E + C + \dots + C^{k-1})$ と仮定する。

$$A_{k+1} = B + A_kC = B + B(E + C + \dots + C^{k-1})C = B(E + C + C^2 + \dots + C^k)$$

よって, $n = k + 1$ のときも成立する。(i)(ii)より, $A_n = B(E + C + \dots + C^{n-1})$ となり,

$$A_n(E - C) = B(E + C + \dots + C^{n-1})(E - C) = B(E - C^n)$$

(2) (1)より, $A_{3n}(E - C) = B(E - C^{3n}) \dots \dots \dots \textcircled{2}$

$$\text{さて, } C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = -2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -8E$$

よって, $C^{3n} = (-8)^n E = (-2)^{3n} E$

ここで, $E - C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ から, $\det(E - C) = 3$ となり, $\textcircled{2}$ から,

$$\begin{aligned} A_{3n} &= B(E - C^{3n})(E - C)^{-1} = B\{1 - (-2)^{3n}\}E(E - C)^{-1} \\ &= \frac{1 - (-2)^{3n}}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1 - (-2)^{3n}}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[解説]

(1)では, 方針に迷ったあげく, 結局は, 推測→帰納法という平凡な解き方を採用しました。

2

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおくと,

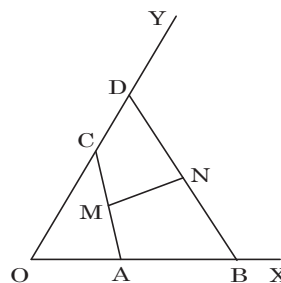
$$\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } |\overrightarrow{MN}|^2 &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2) \\ &= \frac{1}{4} (s^2 + 2st \cos 60^\circ + t^2) \\ &= \frac{1}{4} (s^2 + st + t^2) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } MN = \frac{1}{2} \sqrt{s^2 + st + t^2}$$

(2) $s^2 + t^2 = 1$ ($s > 0$, $t > 0$) より, $s = \cos \theta$, $t = \sin \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと,

$$s^2 + st + t^2 = 1 + \cos \theta \sin \theta = 1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

すると, $\sin 2\theta = 1$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$) のとき, $s^2 + st + t^2$ は最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。よって, (1) より, MN の最大値は $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

[解説]

平面ベクトルの基本題です。 \overrightarrow{MN} の表現がポイントとなっています。なお, (2) では, 相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

3

問題のページへ

(1) $f(x) = (N-x)\log x$ に対して, $f'(x) = -\log x + \frac{N-x}{x} = -\log x + \frac{N}{x} - 1$

$$f''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{N}{x^2} = -\frac{x+N}{x^2} < 0$$

これより, $1 \leq x \leq N$ において, 曲線 $y = f(x)$ は上に凸である。

また, $f'(x)$ の増減は右表のようになり,

$$f'(1) = N-1 > 0, \quad f'(N) = -\log N < 0$$

すると, $f'(x) = 0$ はただ 1 つの解をもつ。

x	1	...	N
$f''(x)$		-	
$f'(x)$		↘	

これを $x = \alpha$ ($1 < \alpha < N$) とおくと, $f(x)$ の増減は右表のようになり, $f(x)$ は極大値を 1 つだけもつ。

x	1	...	α	...	N
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗		↘	0

(2) $f(n) = (N-n)\log n = \log n^{N-n}$ より,

$$a_n = n^{N-n} = e^{f(n)}$$

ここで, l を $1 \leq l \leq N-1$ を満たす自然数とし, $l \leq \alpha \leq l+1$ とする。さらに, 一般的に, a と b の小さくない方を $\max\{a, b\}$ で表すと,

$$M = \max\{e^{f(l)}, e^{f(l+1)}\} = \max\{a_l, a_{l+1}\}$$

よって, $M = a_n$ となる n の個数 k は, $k \leq 2$ である。

(3) $k = 2$ となるのは, $l < \alpha < l+1$ において, $a_l = a_{l+1}$ の場合より,

$$l^{N-l} = (l+1)^{N-l-1} \dots\dots\dots (*)$$

さて, l と $l+1$ は連続する自然数より, 偶奇が異なる。

(i) $N-l-1 \geq 1$ ($N-l \geq 2$) のとき

(*)は, 両辺の偶奇が異なることより成立しない。

(ii) $N-l-1 = 0$ ($N-l = 1$) のとき

(*)より, $l = 1$ すなわち $N = 2$ である。

このとき, $a_n = n^{2-n}$ から $a_1 = a_2 = 1$ となり, $k = 2$ である。

(i)(ii)より, $k = 2$ となるのは, $N = 2$ のときだけである。

[解説]

$f(x)$ のグラフは書いていませんが, これをイメージして解いています。(3)は, (1) と(2)の延長線上では解決できない点が難です。

4

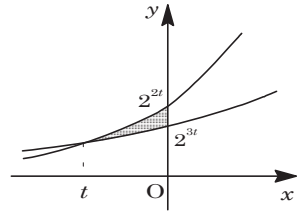
問題のページへ

(1) 2 曲線 $y = 2^{2x+2t}$ ……①と $y = 2^{x+3t}$ ……②の交点は、

$$2^{2x+2t} = 2^{x+3t}, \quad 2x + 2t = x + 3t$$

よって、 $x = t$ となる。

そこで、2 曲線①と②および y 軸で囲まれる部分を、 x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ は、



$t < 0$ から、

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_t^0 2^{2(2x+2t)} dx - \pi \int_t^0 2^{2(x+3t)} dx = \frac{\pi}{\log 2} \left[\frac{1}{4} \cdot 2^{4x+4t} - \frac{1}{2} \cdot 2^{2x+6t} \right]_t^0 \\ &= \frac{\pi}{\log 2} \left\{ \frac{1}{4} (2^{4t} - 2^{8t}) - \frac{1}{2} (2^{6t} - 2^{8t}) \right\} = \frac{\pi}{4 \log 2} (2^{8t} - 2 \cdot 2^{6t} + 2^{4t}) \end{aligned}$$

(2) $V'(t) = \frac{\pi}{4 \log 2} (8 \cdot 2^{8t} \log 2 - 12 \cdot 2^{6t} \log 2 + 4 \cdot 2^{4t} \log 2)$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 2^{8t} - 3 \cdot 2^{6t} + 2^{4t} \\ &= 2^{4t} (2 \cdot 2^{4t} - 3 \cdot 2^{2t} + 1) \\ &= 2^{4t} (2 \cdot 2^{2t} - 1)(2^{2t} - 1) \end{aligned}$$

t	...	$-\frac{1}{2}$...	0
$V'(t)$	+	0	-	
$V(t)$	↗		↘	

すると、 $t < 0$ から $2^{2t} - 1 < 0$ となり、 $V(t)$ の増減は右表のようになる。これより、 $V(t)$ の最大値は、

$$V\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4 \log 2} (2^{-4} - 2 \cdot 2^{-3} + 2^{-2}) = \frac{\pi}{64 \log 2}$$

[解説]

とりたてて工夫もせずに解いています。ただ、 $t < 0$ には要注意です。

5

問題のページへ

- (1) k を $0 \leq k \leq 499$ を満たす整数とし、初めの k 回が任意、 $k+1$ 回目に裏、その後 500 回続けて表が出て、 $k+501$ 回目に終了する場合を考える。

ここで、 $n = k + 501$ とおくと、 $501 \leq k + 501 \leq 1000$ から、

$$p(n) = 1^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{500} = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

- (2) 1001 回目で終了するのは、500 回目に終了せず、501 回目に裏、その後 500 回続けて表が出る場合より、

$$p(1001) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \{1 - p(500)\}$$

また、1002 回目で終了するのは、500 回目、501 回目に終了せず、502 回目に裏、その後 500 回続けて表が出る場合より、

$$p(1002) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \{1 - p(500) - p(501)\}$$

すると、(1) から $p(501) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ なので、

$$\begin{aligned} p(1002) - p(1001) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \{1 - p(500) - p(501) - 1 + p(500)\} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{501} p(501) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{501} \left(\frac{1}{2}\right)^{501} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{1002} \end{aligned}$$

- (3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき、(2) と同様に考えて、

$$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \{1 - p(500) - p(501) - \dots - p(n-501)\}$$

$$p(n+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501} \{1 - p(500) - p(501) - \dots - p(n-500)\}$$

これより、 $p(n+1) - p(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{501} p(n-500)$

$1002 \leq n \leq 1500$ より、 $502 \leq n-500 \leq 1000$ なので、 $p(n-500) = \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ となり、

$$p(n+1) - p(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{501} \left(\frac{1}{2}\right)^{501} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$$

[解説]

余事象の考え方を利用して(2)を解くと、(3)にスムーズに接続できます。しかし、場合分けをして(2)を解くと、(3)への接続の難度がアップします。