1　　解答解説のページへ

曲線$C: y = x^3 - kx$（k は実数）を考える。C 上に点$\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ $(a \neq 0)$をとる。次の問いに答えよ。

(1)　点 A における C の接線をl_1とする。l_1と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2)　点 B における C の接線をl_2とする。l_1とl_2が直交するとき, a と k が満たす条件を求めよ。

(3)　l_1とl_2が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

平面上の三角形 OAB を考え，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ とおく。辺 OA を$1:2$に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ となる点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(2)　t の値を求めよ。

(3)　AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

次のような，いびつなさいころを考える。1，2，3 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{6}$，4 の目が出る確率は a，5，6 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2}$である。ただし$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$とする。このさいころを振ったとき，平面上の$(x,\ y)$にある点 P は，1，2，3 のいずれかの目が出ると$(x+1,\ y)$に，4 の目が出ると$(x,\ y+1)$に，5，6 のいずれかの目が出ると$(x-1,\ y-1)$に移動する。原点$(0,\ 0)$にあった点 P が，k 回さいころを振ったときに$(2,\ 1)$にある確率を p_k とする。

(1)　p_1，p_2，p_3を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。

(3)　p_6 が最大になるときの a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$C: y = x^3 - kx$ ……①に対して，$y' = 3x^2 - k$ となるので，$\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ における接線 l_1 の方程式は,

$$y - (a^3 - ka) = (3a^2 - k)(x - a),\quad y = (3a^2 - k)x - 2a^3 \text{ ………②}$$

①②を連立して，$x^3 - kx = (3a^2 - k)x - 2a^3$

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0,\ (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

点 B の x 座標は，$x \neq a$ より，$x = -2a$

(2)　点 B における接線 l_2 の傾きは，$y' = 3(-2a)^2 - k = 12a^2 - k$

l_1 と l_2 が直交することより，$(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$

$$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0 \text{ ………③}$$

(3)　③を満たす 0 でない a が存在する条件を求める。まず，$u = a^2 > 0$ とおくと,

$$36u^2 - 15ku + k^2 + 1 = 0 \text{ ………④}$$

④を満たす正の u が存在する条件は，$k^2 + 1 > 0$ に注意すると,

$$D = 15^2k^2 - 4\times 36(k^2 + 1) = 9(9k^2 - 16) = 9(3k + 4)(3k - 4) \geqq 0 \text{ ………⑤}$$

$$u = \frac{5}{24}k > 0 \text{ ………⑥}$$

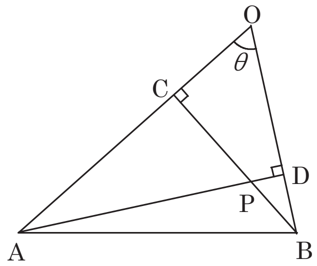
よって，⑤⑥より，$k \geqq \dfrac{4}{3}$ となる。

［解 説］

接線どうしの直交を題材にした頻出基本問題です。

2

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は $\vec{a}$ の OB 方向への正射影ベクトルより，

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}\vec{b}$ なので，$\dfrac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=60^\circ$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は $\vec{b}$ の OA 方向への正射影ベクトルより, (1)の結果から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|}\vec{a}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$ なので，$\dfrac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|}=\dfrac{1}{3}$ すなわち $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\dfrac{2}{3}$ となり，

$$t=\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

(3)　△OAD と直線 BC について，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}=1,\quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{OC}}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{DB}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{1}=8$$

よって，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=8:1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}\vec{b}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

［解 説］

(1)と(2)は正射影ベクトルを利用した解法です。普通に内積の処理でも構いません。(3)も同様です。

3

問題のページへ

(1) まず，点 P が右に 1 だけ動く確率は $\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2}$，上に 1 だけ動く確率は a，左に 1 で下に 1 だけ動く確率は $\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)\times 2=\frac{1}{2}-a$ である。

さて，点 P が原点から点 $(2,\ 1)$ に移動するには，さいころを少なくとも 3 回振らなければならない。言い換えると，$p_1=p_2=0$ である。

また，3 回振って点 $(2,\ 1)$ に移動するには，右 2 回，上 1 回だけ動くことより，その確率 p_3 は，

$$p_3={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 a=\frac{3}{4}a$$

(2) 6 回さいころを振って，点 P が点 $(2,\ 1)$ に移動するとき，右 x 回，上 y 回，左下 $6-x-y$ 回だけ動くとすると，

$$x-(6-x-y)=2\cdots\cdots\cdots①,\quad y-(6-x-y)=1\cdots\cdots\cdots②$$

①より $2x+y=8$，②より $x+2y=7$ となるので，

$$x=3,\ y=2,\ 6-x-y=1$$

よって，6 回振って点 $(2,\ 1)$ に移動する確率 p_6 は，

$$p_6=\frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 a^2\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{15}{4}(-2a^3+a^2)$$

(3) (2)より，$f(a)=-2a^3+a^2$ とおくと，

$$f'(a)=-6a^2+2a=-2a(3a-1)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗		↘	

$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ において，右表より，$a=\frac{1}{3}$ のとき $f(a)$ は最大となる。

よって，$p_6=\frac{15}{4}f(a)$ から，p_6 が最大になるのは，$a=\frac{1}{3}$ のときである。

［解 説］

確率の基本問題です。場合分けもなく不気味なくらいです。