**1**

解答解説のページへ

放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ {a_1}^2)$，$\mathrm{A}_2(a_2,\ {a_2}^2)$，$\mathrm{A}_3(a_3,\ {a_3}^2)$，…を，$\mathrm{A}_{k+2}$ $(k \geqq 1)$ における $C$ の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし，$a_1 < a_2$ とする。三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を $T_k$ とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と $C$ で囲まれた部分の面積を $S$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を $S$ を用いて表せ。

**2**

解答解説のページへ

行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を $f$ とする。点 $\mathrm{P}(16\sqrt{3},\ 16)$ をとり，$\mathrm{P}_1=f(\mathrm{P})$，$\mathrm{P}_{n+1}=f(\mathrm{P}_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。正の整数 $k$ に対して，次の条件を満たす領域を $D_k$ とする。

$$x<0,\ y<0,\ \sqrt{3}x+y\leqq -2^{-k}$$

このとき，$D_k$ に含まれる $\mathrm{P}_n$ の個数を $k$ で表せ。

**3**

解答解説のページへ

　$\alpha$ を 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解とするとき，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，必要ならば，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。

**4**

解答解説のページへ

平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。

**5**

解答解説のページへ

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1) 不等式 $1-{q_n}^2 \leqq \dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n=1$ を証明せよ。ただし，$e$ は自然対数の底である。

(2) $S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx$ を $p_n$ で表せ。

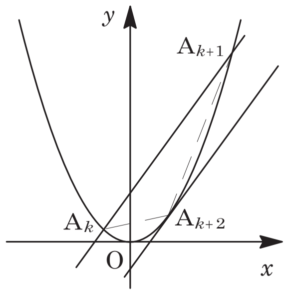
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$C: y = x^2$ に対して，$y' = 2x$

さて，条件より，3 点 $\mathrm{A}_k(a_k,\ {a_k}^2)$，$\mathrm{A}_{k+1}(a_{k+1},\ {a_{k+1}}^2)$，$\mathrm{A}_{k+2}(a_{k+2},\ {a_{k+2}}^2)$ について，$\mathrm{A}_{k+2}$ における $C$ の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であることから，




$$2a_{k+2} = \frac{{a_{k+1}}^2 - {a_k}^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}} = (a_{k+1} - a_k,\ {a_{k+1}}^2 - {a_k}^2)$

$$= (a_{k+1} - a_k)(1,\ a_{k+1} + a_k)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+2}} = (a_{k+2} - a_k)(1,\ a_{k+2} + a_k)$$

すると，$\triangle \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積 $T_k$ は，①を利用すると，

$$T_k = \frac{1}{2}\left|(a_{k+1} - a_k)(a_{k+2} - a_k)\{(a_{k+2} + a_k) - (a_{k+1} + a_k)\}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(a_{k+1} - a_k)(a_{k+2} - a_k)(a_{k+2} - a_{k+1})\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(a_{k+1} - a_k)\left(\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k - a_k\right)\left(\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k - a_{k+1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{8}\left|(a_{k+1} - a_k)(a_{k+1} - a_k)(-a_{k+1} + a_k)\right| = \frac{1}{8}\left|a_{k+1} - a_k\right|^3$$

$$T_{k+1} = \frac{1}{8}\left|a_{k+2} - a_{k+1}\right|^3 = \frac{1}{8}\left|\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k - a_{k+1}\right|^3 = \frac{1}{64}\left|a_{k+1} - a_k\right|^3$$

よって，$T_{k+1} = \dfrac{1}{8}T_k$ より，$\dfrac{T_{k+1}}{T_k} = \dfrac{1}{8}$ である。

(2)　(1)より，数列 $\{T_k\}$ は公比 $\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるので，$a_1 < a_2$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{T_1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}T_1 = \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{8}\left|a_2 - a_1\right|^3 = \frac{1}{7}(a_2 - a_1)^3 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と $C$ で囲まれた部分の面積 $S$ は，

$$S = \int_{a_1}^{a_2} -(x - a_1)(x - a_2)\,dx = \frac{1}{6}(a_2 - a_1)^3 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{1}{7}\cdot 6S = \frac{6}{7}S$

［解 説］

三角形の面積に無限等比級数を組み合わせた標準的な 1 題です。



© 電送数学舎 2009

## 2

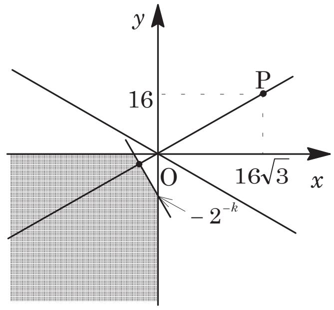
問題のページへ

まず，行列 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $f$ は，任意の点を原点まわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，さらに原点との距離を $\frac{1}{2}$ 倍にする変換である。

さて，$\mathrm{P}(16\sqrt{3},\ 16)$ から直線 OP と $x$ 軸の正の部分となす角は $\frac{\pi}{6}$ であることより，$\mathrm{P}_1=f(\mathrm{P})$，$\mathrm{P}_{n+1}=f(\mathrm{P}_n)$ で定義される点 $\mathrm{P}_n$ が存在するのは，

$$y=x\tan\frac{\pi}{6},\quad x=0,\quad y=-x\tan\frac{\pi}{6}$$

すると，網点部 $D_k$：$x<0$，$y<0$，$\sqrt{3}x+y\leqq -2^{-k}$ に含まれる $\mathrm{P}_n$ は，第 3 象限内の半直線 $y=x\tan\frac{\pi}{6}$ 上にあることがわかるので，この $n$ の条件は，$l\geqq 1$ として，




$$n=6(l-1)+3=6l-3\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{P}_n$ と原点との距離を $d_n$ とおくと，

$$d_0=\mathrm{OP}=16\sqrt{3+1}=32,\quad d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n$$

これより，$d_n=32\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^{5-n}\cdots\cdots\cdots②$

そこで，$\mathrm{P}_n$ が半直線 $y=x\tan\frac{\pi}{6}$ $(x<0)$ 上にあるときは，①②より，

$$d_n=2^{5-6l+3}=2^{8-6l}$$

さらに，直線 $\sqrt{3}x+y=-2^{-k}$ は，半直線 $y=x\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ と直交し，原点との距離 $d$ は $d=\frac{2^{-k}}{\sqrt{3+1}}=2^{-k-1}$ から，$\mathrm{P}_n$ が $D_k$ に含まれる条件は，$d_n\geqq d$ となり，

$$2^{8-6l}\geqq 2^{-k-1},\quad 8-6l\geqq -k-1,\quad l\leqq\frac{k+9}{6}\cdots\cdots\cdots③$$

そこで，一般的に $x$ を超えない最大整数を $[\,x\,]$ で表すと，③より，$D_k$ に含まれる $\mathrm{P}_n$ の個数は $\left[\,\frac{k+9}{6}\,\right]$ となる。

### ［解 説］

回転・拡大の相似変換を題材にした問題です。角と距離の条件を個別に考え，図形的に解いています。



© 電送数学舎 2009

**3**

問題のページへ

$\alpha$ は 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解より，$\alpha^2=2\alpha+1$ となり，

$$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=ab+(5ac+5b)\alpha+25c(2\alpha+1)$$
$$=(ab+25c)+(5ac+5b+50c)\alpha$$

条件より，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ なので，

$$(ab+25c-1)+5(ac+b+10c)\alpha=0$$

ここで, $a, b, c$ は整数，$\alpha=1\pm\sqrt{2}$ は無理数より，

$$ab+25c-1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ ac+b+10c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$b=-c(a+10)$ となり，①に代入すると，

$$-ac(a+10)+25c-1=0,\ \ c(-a^2-10a+25)=1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，③から $c$ は 1 の約数となり，$c=\pm1$ である。

(i)　$c=1$ のとき

③より，$-a^2-10a+25=1$，$a^2+10a-24=0$，$(a+12)(a-2)=0$

$a=-12$ のとき $b=-1\times(-2)=2$，$a=2$ のとき $b=-1\times12=-12$ となる。

(ii)　$c=-1$ のとき

③より，$-a^2-10a+25=-1$，$a^2+10a-26=0$ となり，整数解はない。

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(-12,\ 2,\ 1)$，$(2,\ -12,\ 1)$

## [解 説]

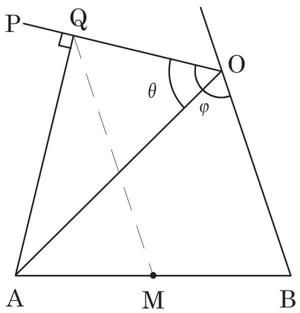
整数についての基本問題です。式も扱いやすく，計算量も少なめです。



© 電送数学舎 2009

**4**

問題のページへ




(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を $\theta$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を $\varphi$ とおく。

条件より，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ ………①

すると，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqq\pi$ となり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ から，①より，

$$\cos\theta=-\cos\varphi,\ \cos\theta=\cos(\pi-\varphi)$$

これより，$\theta=\pi-\varphi$ となり，OP は∠AOB の外角の二等分線である。

さて，点 Q は OP 上にあるので, $k$ を正の定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{\vec{a}+(-\vec{b})\}=k(\vec{a}-\vec{b})\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=y$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\vec{b}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から，

$$(k\vec{a}-k\vec{b}-x\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ k|\vec{a}-\vec{b}|^2-x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

これより，$k=\dfrac{x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\dfrac{x|\vec{a}|^2-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{x-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{x}{2}$ となり，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

そこで, M は辺 AB の中点から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})-\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\vec{b}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行である。

(2)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\right||\vec{b}|=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$

## [解 説]

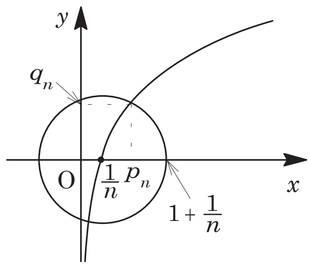
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるのに注目し，ひし形の対角線が角を二等分するという定理をベースにした解です。



© 電送数学舎 2009

**5**

問題のページへ




(1)　点$(p_n,\ q_n)$は，$y=\log(nx)$と$\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$の

第 1 象限にある交点であるので，

$q_n=\log(np_n)$ ………①

$\left(p_n-\dfrac{1}{n}\right)^2+{q_n}^2=1$ ………②

②より，$1-{q_n}^2=\left(p_n-\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{(np_n-1)^2}{n^2}$ ………③

①より，$np_n=e^{q_n}$から，$np_n-1=e^{q_n}-1$ ………④

③④より，$1-{q_n}^2=\dfrac{(e^{q_n}-1)^2}{n^2}$

ここで，$0<q_n\leqq 1$から，$0<e^{q_n}-1\leqq e-1$となり，$1-{q_n}^2\leqq\dfrac{(e-1)^2}{n^2}$

さらに，$0<{q_n}^2\leqq 1$から，$0\leqq 1-{q_n}^2$となり，

$0\leqq 1-{q_n}^2\leqq\dfrac{(e-1)^2}{n^2}$

すると，$n\to\infty$のとき$1-{q_n}^2\to 0$すなわち${q_n}^2\to 1$となり，$q_n>0$から，

$\lim_{n\to\infty}q_n=1$

(2)　$S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx=\Big[x\log(nx)\Big]_{\frac{1}{n}}^{p_n}-\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}x\cdot\frac{1}{x}\,dx=p_n\log(np_n)-p_n+\frac{1}{n}$

(3)　(2)の結果に④を適用すると，

$nS_n=np_n\log(np_n)-np_n+1=q_ne^{q_n}-e^{q_n}+1=e^{q_n}(q_n-1)+1$ ………⑤

(1)から，$\lim_{n\to\infty}q_n=1$なので，⑤より$\lim_{n\to\infty}nS_n=1$である。

### ［解　説］

ていねいな誘導のついた極限の問題です。この誘導がなければ難問です。



© 電送数学舎 2009