1　　解答解説のページへ

曲線C：$y=-x^2-1$を考える。

(1)　tが実数全体を動くとき，曲線C上の点$(t,\ -t^2-1)$を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域をxy平面上に図示せよ。

(2)　Dを(1)で求めた領域の境界とする。Dがx軸の正の部分と交わる点を$(a,\ 0)$とし，$x=a$でのCの接線をlとする。Dとlで囲まれた部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

連立方程式

$$2^x + 3^y = 43,\quad \log_2 x - \log_3 y = 1$$

を考える。

(1)　この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ。

(2)　この連立方程式を満たす正の実数 x, y は, (1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。

3

解答解説のページへ

(1)　不等式 $(|x|-2)^2+(|y|-2)^2 \leqq 1$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　1 個のさいころを 4 回投げ，n 回目 $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に出た目の数を a_n とする。このとき，$(x,\ y)=(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率を求めよ。

1

問題のページへ

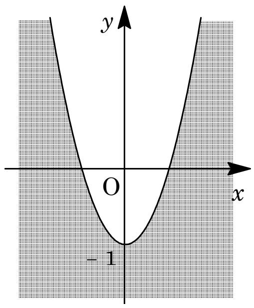
(1)　$C: y=-x^2-1$ ……①上に頂点のある放物線 $y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ ……②が通過する点$(x,\ y)$の条件は，②を t の方程式としてみたとき，t が実数解をもつ条件に一致する。

②より，$4y=3(x^2-2tx+t^2)-4t^2-4$

$$t^2+6xt-3x^2+4y+4=0$$

実数解条件より，$D/4=9x^2-(-3x^2+4y+4)\geqq 0$

$$y\leqq 3x^2-1$$

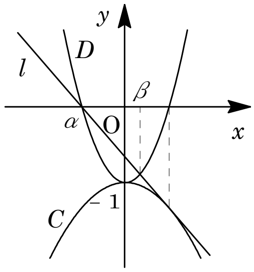


これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。

(2)　条件より，$D: y=3x^2-1$ ………③

D と x 軸の正の部分との交点は$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$となり，$C$ 上の点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{4}{3}\right)$における接線 l の方程式を求めると，①より，$y'=-2x$ から，

$$y+\frac{4}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\ \text{………④}$$



③④の交点は，$3x^2-1=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}x-\dfrac{2}{3}$，$3x^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}x-\dfrac{1}{3}=0$

$$9x^2+2\sqrt{3}x-1=0,\ (3\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)=0$$

よって，$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ となり，$\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\beta=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ とおくと，D と l で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}-3x^2+1\right)dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{32}{243}\sqrt{3}$$

［解　説］

曲線の通過領域と微積分の融合問題です。この両者の必須技法が問われています。

2

問題のページへ

(1)　自然数 x, y に対し，

$$2^x + 3^y = 43 \cdots\cdots\cdots ①,\ \log_2 x - \log_3 y = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$3^y \leqq 43 - 2^1 = 41$ となるので，$y = 1,\ 2,\ 3$ である。

$y = 1$ のとき，①より $2^x = 40$ となり，これを満たす x はない。

$y = 2$ のとき，①より $2^x = 34$ となり，これを満たす x はない。

$y = 3$ のとき，①より $2^x = 16$ となり，$x = 4$ である。このとき，$\log_2 4 - \log_3 3 = 1$ より，②を満たしているので，

$$x = 4,\ y = 3$$

(2)　$\log_2 x = X$，$\log_3 y = Y$ とおくと，$x = 2^X$，$y = 3^Y$ となり，①②より，

$$2^{2^X} + 3^{3^Y} = 43 \cdots\cdots\cdots ③,\ X - Y = 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

④より $Y = X - 1$ となり，③に代入すると，$2^{2^X} + 3^{3^{X-1}} = 43 \cdots\cdots\cdots ⑤$

ここで，$f(X) = 2^{2^X} + 3^{3^{X-1}}$ とおくと，$f(X)$ は増加関数であり，⑤の解の個数は高々 1 個である。

さて，$f(2) = 2^{2^2} + 3^{3^1} = 16 + 27 = 43$ から，$X = 2$ は⑤の解であり，このとき④より $Y = 1$，すなわち $X = 2$，$Y = 1$ は連立方程式③④のただ 1 つの解である。

以上より，$x = 2^2 = 4$，$y = 3^1 = 3$ は，連立方程式①②のただ 1 つの解である。

［解　説］

(1)は通常の着眼で解けますが，(2)は難問です。上の解では，指数関数の単調性を利用して示しましたが，ここまで至る試行錯誤には時間がかかってしまいました。

3

問題のページへ

(1)　$f(x,\ y)=(|x|-2)^2+(|y|-2)^2-1$ とおくと,

$$f(x,\ -y)=f(x,\ y),\ f(-x,\ y)=f(x,\ y)$$

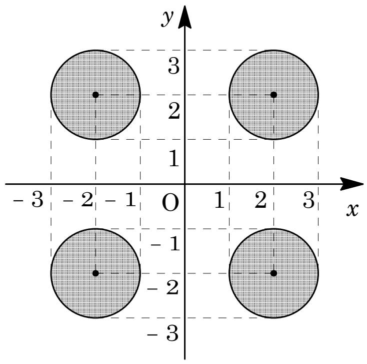
よって, 領域 $f(x,\ y)\leqq 0$ は, x 軸および y 軸に関して対称である。

そこで, $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ において考えると,

$$(x-2)^2+(y-2)^2\leqq 1$$

この不等式の表す領域は, 点 $(2,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円の内部または周上である。

この領域を, x 軸対称移動, y 軸対称移動することによって得られる $(|x|-2)^2+(|y|-2)^2\leqq 1$ の表す領域は, 右図の網点部となる。ただし, 境界線は領域に含む。



(2)　1 個のさいころを 4 回投げたとき, 4 個の出た目の数の組について, 6^4 通りの場合が同様に確からしい。

ここで, さいころの出た目の数を a_i, a_j とし, この値と a_i-a_j の関係をまとめると, 右表のようになる。

a_i ＼ a_j	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

さて出た目の数を a_1, a_2, a_3, a_4 とし, 点 $(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が, 領域 $(x-2)^2+(y-2)^2\leqq 1$ に含まれるのは,

$$(a_1-a_2,\ a_3-a_4)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

この場合の数は, 合わせて, $5\times4+4\times5+4\times4+4\times3+3\times4=80$ 通りとなる。

よって, 対称性を考えると, 点 $(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率は,

$$\frac{80\times4}{6^4}=\frac{20}{81}$$

［解 説］

領域と確率の融合問題です。確率の部分については, 数えもれを防ぐために, すべての場合を書き出しています。