1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式 $\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1 : x^2+3y^2=3,\quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち, x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，y 軸と l_1，l_2 の交点をそれぞれ Q, R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$l,\ m,\ n$ を 3 以上の整数とする。等式 $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ を満たす $l,\ m,\ n$ の組をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

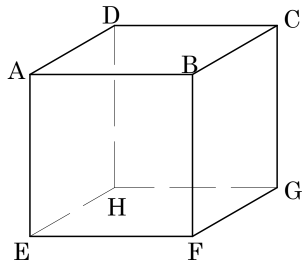
(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ



n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。

(1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2) 時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3) 時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ に対して，$f'(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1$ となり，

$$f''(x)=\frac{2e^x(1+e^x)-2e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

よって，$\log f''(x)=\log 2e^x-2\log(1+e^x)=-2\log(1+e^x)+x+\log 2=-f(x)$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ とし, (1)の結果を適用すると,

$$I=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{\log f''(x)}dx=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)f''(x)\,dx$$

$$=\Big[(x-\log 2)f'(x)\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}f'(x)\,dx=(\log 2)f'(0)-\Big[f(x)\Big]_0^{\log 2}$$

$$=-f(\log 2)+f(0)=-2\log 3+\log 2+\log 2+(2\log 2-\log 2)$$

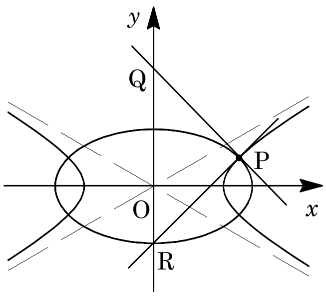
$$=-2\log 3+3\log 2=\log\frac{8}{9}$$

［解　説］

定積分の計算問題です。(1)の誘導によって，方針は自然に決まります。

2

問題のページへ



$C_1 : x^2+3y^2=3$ ……①，$C_2 : \dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=2$ ……②

の交点の座標を求める。

まず，②は，$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=2\sin^2\theta\cos^2\theta$ となり，①と連立すると，

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ \sin^2\theta & -\cos^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

ここで，$\varDelta=-\cos^2\theta-3\sin^2\theta=-1-2\sin^2\theta<0$ から，

$$\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}=-\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix}-\cos^2\theta & -3\\ -\sin^2\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix}3\cos^2\theta+6\sin^2\theta\cos^2\theta\\ 3\sin^2\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix}3\cos^2\theta(1+2\sin^2\theta)\\ \sin^2\theta(1+2\sin^2\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos^2\theta\\ \sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であり，第 1 象限の交点 P は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ となる。点 P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とすると，

$$l_1 : \sqrt{3}x\cos\theta+3y\sin\theta=3,\quad l_2 : \frac{\sqrt{3}x}{\cos\theta}-\frac{y}{\sin\theta}=2$$

y 軸と l_1 の交点は $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$，$l_2$ の交点は $\mathrm{R}(0,\ -2\sin\theta)$ となり，

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{\sin\theta}+2\sin\theta\geqq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\theta}\cdot 2\sin\theta}=2\sqrt{2}$$

等号は，$\dfrac{1}{\sin\theta}=2\sin\theta$　$\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$ のときに成立する。

よって，QR の長さの最小値は $2\sqrt{2}$ である。

［解　説］

楕円周上の点をパラメータ表示することからスタートしました。延々と計算をして，結局，交点は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ であることがわかり，書き直したのが上の解です。

3

問題のページへ

3 以上の整数 l, m, n に対して, $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ ………①

まず, $l\geqq 3$ から, $0<\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\leqq\dfrac{2}{3}$ となり, $m>0$ から左側の不等式は,

$$2n-mn+2m>0\,,\ \ mn-2m-2n<0\,,\ \ (m-2)(n-2)<4 \text{ ………②}$$

すると, ②を満たす 3 以上の整数$(m,\ n)$は,

$$(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3)$$

(i)　$(m,\ n)=(3,\ 3)$のとき　$\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{2}$ となり, ①から, $l=4$

(ii)　$(m,\ n)=(3,\ 4)$のとき　$\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{3}$ となり, ①から, $l=6$

(iii)　$(m,\ n)=(3,\ 5)$のとき　$\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{6}$ となり, ①から, $l=12$

(iv)　$(m,\ n)=(4,\ 3)$のとき　$\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{4}$ となり, ①から, $l=8$

(v)　$(m,\ n)=(5,\ 3)$のとき　$\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{10}$ となり, ①から, $l=20$

(i)～(v)より, ①を満たす 3 以上の整数$(l,\ m,\ n)$は,

$$(4,\ 3,\ 3),\ (6,\ 3,\ 4),\ (12,\ 3,\ 5),\ (8,\ 4,\ 3),\ (20,\ 5,\ 3)$$

［解　説］

見かけよりは扱いやすい不定方程式です。アバウトな評価で解の候補が絞れます。実際は, もっときつい評価をして進めましたが。

4

問題のページへ

条件より，球 T_1，T_2 の中心をそれぞれ $(0,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 0,\ 0)$ とすると，

$$T_1 : x^2+y^2+z^2=9,\ T_2 : (x-2)^2+y^2+z^2=1$$

また，球 S の中心を $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とおくと，

$$S : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$$

さて，S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接していることより，

$$\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \leqq 3-1,\ {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①$$

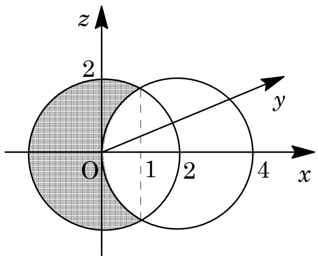
また，S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接していることより，

$$\sqrt{(x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \geqq 1+1,\ (x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②$$

よって，S の中心が存在しうる範囲 D は，①②より，

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①'$$

$$(x-2)^2+y^2+z^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②'$$



ここで，平面 $x=k\ (0 \leqq k \leqq 1)$ で①′ ②′の共通範囲を切断すると，

$$y^2+z^2 \leqq 4-k^2 \cdots\cdots\cdots ①'$$

$$y^2+z^2 \geqq 4-(k-2)^2 \cdots\cdots\cdots ②'$$

これより，切り口は，x 軸上に中心があり，外径が $\sqrt{4-k^2}$，内径が $\sqrt{4-(k-2)^2}$ のドーナツ形であり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi(4-k^2)-\pi\left\{4-(k-2)^2\right\}=\pi(4-4k)$$

これより，立体 D の体積 V は，

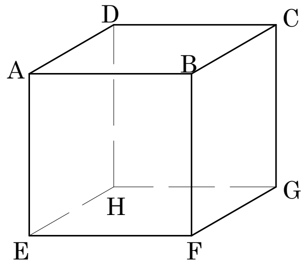
$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3+\int_0^1 S(k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+\int_0^1 \pi(4-4k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+2\pi=\frac{22}{3}\pi$$

［解　説］

平面図形では頻出の内接と外接を題材にした問題です。対象が空間図形でも同じように考えることができます。なお，球面の方程式などについては「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

5

問題のページへ



(1)　時刻 1 に，点 P は A から B, D, E のいずれかに移動，点 Q は C から B, D, G のいずれかに移動している。

これより，異なる頂点に位置する (P，Q) は，

(B，D)，(B，G)，(D，B)，(D，G)

(E，B)，(E，D)，(E，G)

(2)　まず，(1)から，P と Q が異なる頂点に位置するとき，その位置は 1 つの面の対角線の両端である。

そこで，(P，Q) が異なる頂点に位置するとき，1 回の移動で可能な $3^2 = 9$ 通りの (P，Q) の位置のうち，異なる頂点であるのは，(1)から 7 通りである。

すると，時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率を r_n とすると，

$$r_{n+1} = \frac{7}{9}r_n,\quad r_n = r_0\left(\frac{7}{9}\right)^n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

(3)　時刻 n において，(P，Q) がともに上面 ABCD の異なる頂点か，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置する状態を A_n とし，(P，Q) のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH の頂点に位置する状態を B_n とする。

すると，状態 A_n である確率が p_n，状態 B_n である確率が q_n である。

さて，(1)から，状態 A_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$，状態 B_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{2}{9}$，これら以外の状態から状態 A_{n+1} への推移はないので，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n \cdots\cdots\cdots①$$

(4)　(2)(3)より，$p_n + q_n = r_n$ なので，$q_n = r_n - p_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n - p_n \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{2}{9}p_n = \frac{1}{9}p_n + \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ となり，

$$p_{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} = \frac{1}{9}\left\{p_n - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n\right\}$$

すると，$p_0 = 1$ から，$p_n - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \left\{p_0 - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ となり，②から，

$$p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n,\quad q_n = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 7^n - 2}{7^n + 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 - 2\cdot 7^{-n}}{1 + 2\cdot 7^{-n}} = 2$

［解　説］

問題文が長く，また答案の書きにくい問題です。(3)の状態 B_n からの推移確率については，上面を AEFB，下面を DHGC として見ると，(1)が利用できます。なお，漸化式の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。