1

解答解説のページへ

実数の組$(x,\ y,\ z)$で，どのような整数$l,\ m,\ n$に対しても，等式

$$l\cdot10^{x-y}-nx+l\cdot10^{y-z}+m\cdot10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

実数の組$(p,\ q)$に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$とおく。

(1)　放物線$y=f(x)$が点$(0,\ 1)$を通り，しかも直線$y=x$の　$x>0$　の部分と接するような実数の組$(p,\ q)$と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組$(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$および$f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$とおく。実数α，β（ただし$\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\quad \text{かつ} \quad f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間$\alpha\leqq x\leqq\beta$において不等式$f_1(x)<f_2(x)$がつねに成り立つことを示せ。

(3)　長方形$R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$を考える。また，4点$\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$をこの順に結んで得られる折れ線を$L$とする。実数の組$(p,\ q)$を，放物線$y=f(x)$と折れ線$L$が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，Rの点のうちで放物線$y=f(x)$が通過する点全体の集合をTとする。RからTを除いた領域Sを座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とする。ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$ をとり，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*)\quad (\overrightarrow{v_1}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_3}=c\vec{p}$$

を考える。ここで $\overrightarrow{v_i}\cdot\vec{p}\ (i=1,\ 2,\ 3)$ はベクトル $\overrightarrow{v_i}$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v}=(x,\ y)$ が，実数 $s,\ t$ を用いて $\vec{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$ と表されることを, s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ。

(2) $\vec{p}=\overrightarrow{v_1}$ と $\vec{p}=\overrightarrow{v_2}$ の両方が条件$(*)$を満たすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件$(*)$を満たすことを示せ。

(3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件$(*)$を満たす。このような実数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

1

問題のページへ

等式 $l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$ ……(＊)が，どのような整数 l, m, n に対しても成立する条件を求める。

まず，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ のとき，成立することが必要で，

$$10^{x-y}+10^{y-z}=13\ \cdots\cdots\text{①},\quad 10^{x-z}=36\ \cdots\cdots\text{②},\quad -x=y\ \cdots\cdots\text{③}$$

逆に，①②③が成立するとき，任意の整数 l，m，n に対して，明らかに(＊)は成立することより，求める条件は①②③である。

①③より，$10^{2x}+10^{-x-z}=13\ \cdots\cdots$④

ここで，$10^x=X>0$，$10^z=Z>0$ とおくと，②④より，

$$\frac{X}{Z}=36\ \cdots\cdots\text{⑤},\quad X^2+\frac{1}{XZ}=13\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

⑤⑥より，$X^2+\dfrac{36}{X^2}=13$，$X^4-13X^2+36=0$ となり，

$$(X+2)(X-2)(X+3)(X-3)=0$$

$X>0$ より，$X=2,\ 3$

(i)　$X=2$ のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{18}$ となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,\ -\log_{10}2,\ -\log_{10}18)$

(ii)　$X=3$ のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{12}$ となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}3,\ -\log_{10}3,\ -\log_{10}12)$

［解　説］

整数問題の装いをしていますが，実質的には指数・対数がらみの連立方程式を解くものです。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x-p)^2+q$ に対して，条件から，$f(0)=1$ となり，$p^2+q=1$ ………①

次に，$y=f(x)$ と $y=x$ を連立して，

$$(x-p)^2+q=x\,,\ \ x^2-(2p+1)x+p^2+q=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x>0$ で，$y=f(x)$ と $y=x$ が接することより，$f(x)=x$ は正の重解をもち，

$$D=(2p+1)^2-4(p^2+q)=0\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ 2p+1>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$(2p+1)^2=4$ となり，④から，$2p+1=2$，$p=\dfrac{1}{2}$

①に代入すると，$q=\dfrac{3}{4}$ となり，このとき②の重解は，$x=\dfrac{2p+1}{2}=1$

よって，接点の座標は，$(1,\ 1)$ である。

(2)　$g(x)=f_2(x)-f_1(x)$ とおくと，条件より $g(\alpha)>0$ かつ $g(\beta)>0$ であり，

$$g(x)=(x-p_2)^2+q_2-(x-p_1)^2-q_1=-2(p_2-p_1)x+{p_2}^2-{p_1}^2+q_2-q_1$$

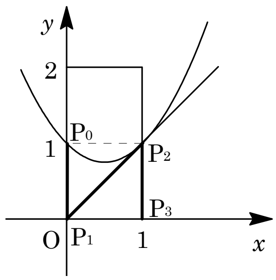
(i)　$p_2\geqq p_1$ のとき　$g(x)$ は単調に減少し，$\alpha<x<\beta$ において，$g(x)\geqq g(\beta)>0$

(ii)　$p_2<p_1$ のとき　$g(x)$ は単調に増加し，$\alpha<x<\beta$ において，$g(x)\geqq g(\alpha)>0$

(i)(ii)より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において $f_1(x)<f_2(x)$ が成り立つ。

(3)　点 $(0,\ 1)$ を通り，直線 $y=x$ と点 $(1,\ 1)$ で接する放物線は, (1)より，

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2-x+1$$

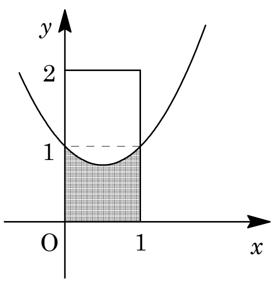


この放物線を $y=f_1(x)$ とおき，放物線 $y=f(x)$ が，不等式 $1=f_1(0)<f(0)$ かつ $1=f_1(1)<f(1)$ を満たすとすると, (2)より，$y=f(x)$ は折れ線 L と共有点をもたない。

また，$f(0)\leqq f_1(0)$ または $f(1)\leqq f_1(1)$ が満たされるとき，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ は，折れ線 L と共有点をもつ。

そこで，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ を，折れ線 L と共有点がないように動かすとき，$y=f(x)$ が通過する領域は，$y=f_1(x)$ の上部全体となる。

したがって，長方形 R から，上記の通過領域 T を除いた領域 S を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含む。また，この領域 S の面積は,



$$\int_0^1(x^2-x+1)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

［解　説］

(3)の論理展開は感覚的すぎると思いながらも，この程度の記述に留めました。

3

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$，$\vec{v}=(x,\ y)$に対して，$\vec{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$から，

$$3s+t=x\cdots\cdots\text{①},\ 2\sqrt{2}t=y\cdots\cdots\text{②}$$

②より，$t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}y$となり，①に代入して，$s=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}y\right)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\sqrt{2}}{12}y$

(2)　条件より，(＊)に$\vec{p}=\overrightarrow{v_1}$，$\vec{p}=\overrightarrow{v_2}$を代入すると，

$$(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_3}=c\overrightarrow{v_1}\cdots\cdots\text{③}$$

$$(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_3}=c\overrightarrow{v_2}\cdots\cdots\text{④}$$

③から，$(\overrightarrow{v_1}\cdot s\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot s\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot s\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_3}=cs\overrightarrow{v_1}$

④から，$(\overrightarrow{v_1}\cdot t\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot t\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot t\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_3}=ct\overrightarrow{v_2}$

$$(\overrightarrow{v_1}\cdot(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}))\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}))\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}))\overrightarrow{v_3}=c(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2})$$

よって，$(\overrightarrow{v_1}\cdot\vec{v})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{v})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\vec{v})\overrightarrow{v_3}=c\vec{v}\cdots\cdots$⑤が成立する。

(3)　すべてのベクトル$\vec{v}$に対して⑤が成立する条件は，(2)より，③④がともに成立する条件に等しい。すると，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$を用いて，

$$\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1}=(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_1}=9a+3b,\ \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2}=(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_2}=3a+9b$$

③より，$9\overrightarrow{v_1}+3\overrightarrow{v_2}+(9a+3b)(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})=c\overrightarrow{v_1}$

$$(9+9a^2+3ab-c)\overrightarrow{v_1}+3(1+3ab+b^2)\overrightarrow{v_2}=\vec{0}\cdots\cdots\text{⑥}$$

④より，$3\overrightarrow{v_1}+9\overrightarrow{v_2}+(3a+9b)(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})=c\overrightarrow{v_2}$

$$3(1+a^2+3ab)\overrightarrow{v_1}+(9+3ab+9b^2-c)\overrightarrow{v_2}=\vec{0}\cdots\cdots\text{⑦}$$

ここで，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$は1次独立なので，⑥⑦より，

$$9+9a^2+3ab-c=0\cdots\cdots\text{⑧},\ 1+3ab+b^2=0\cdots\cdots\text{⑨}$$

$$1+a^2+3ab=0\cdots\cdots\text{⑩},\ 9+3ab+9b^2-c=0\cdots\cdots\text{⑪}$$

⑨⑩より$a^2=b^2$すなわち$b=\pm a$となり，このとき⑧と⑪は一致する。

(i)　$b=a$のとき　⑨より，$a^2+3a^2+1=0$となり，不適である。

(ii)　$b=-a$のとき　⑨より，$a^2-3a^2+1=0$となり，

$$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\ （複号同順）$$

⑧に代入して，$c=9+\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}=12$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 12\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 12\right)$

［解　説］

ベクトルの内積が題材となっていますが，内容は連立方程式です。この点で，第 1 問と類似しています。