1

解答解説のページへ

a を自然数とする。O を原点とする座標平面上で行列 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。

(1)　$r>0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて $A=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき，r，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を a で表せ。

(2)　点 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ に対し，点 Q_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q},\ \mathrm{Q}_{n+1}=f(\mathrm{Q}_n)$$

で定める。$\triangle \mathrm{OQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ。

(3)　f によって点 $(2,\ 7)$ に移されるもとの点 P の x 座標の小数第 1 位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるという。自然数 a の値を求めよ。またこのとき $S(n)>10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ。ただし $0.3<\log_{10}2<0.31$ を用いてよい。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

実数θが動くとき，xy 平面上の動点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$および$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を考える。$\theta$が$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数の組$(p,\ q)$に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$とおく。

(1) 放物線$y=f(x)$が点$(0,\ 1)$を通り，しかも直線$y=x$の $x>0$ の部分と接するような実数の組$(p,\ q)$と接点の座標を求めよ。

(2) 実数の組$(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$および$f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$とおく。実数α，β（ただし$\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\ \text{かつ}\ f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間$\alpha\leqq x\leqq\beta$において不等式$f_1(x)<f_2(x)$がつねに成り立つことを示せ。

(3) 長方形$R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$を考える。また，4 点$\mathrm{P_0}(0,\ 1)$，$\mathrm{P_1}(0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(1,\ 1)$，$\mathrm{P_3}(1,\ 0)$をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組$(p,\ q)$を，放物線$y=f(x)$と折れ線Lが共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，Rの点のうちで放物線$y=f(x)$が通過する点全体の集合をTとする。RからTを除いた領域Sを座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1)　定数 p,q に対し，次を満たす定数 r が存在することを示せ。

$x \geqq 1$　ならば　$|px+q| \leqq rx$

(2)　恒等式 $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ を用いて，次を満たす定数 $k,\ l$ が存在することを示せ。

$x \geqq 1$　ならば　$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right| \leqq \dfrac{l}{x}$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x)=(x+m)^3$ と表されることを示せ。

5

解答解説のページへ

正数 r に対して，$a_1=0$，$a_2=r$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$a_{n+1}=a_n+r_n(a_n-a_{n-1})\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ，表がでたとき $r_n=\dfrac{r}{2}$，裏がでたとき $r_n=\dfrac{1}{2r}$ とする。ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする。a_n の期待値を p_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) p_3 および p_4 を，r を用いて表せ。

(2) $n\geqq 3$ のときに p_n を，n と r を用いて表せ。

(3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ。

(4) r が(3)で求めた範囲を動くとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ の最小値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 条件より，$A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$なので,

$a=r\cos\theta$………①，$1=r\sin\theta$………②

①②より，$a^2+1=r^2$となり，$r>0$から，$r=\sqrt{a^2+1}$

$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(2) 1 次変換fによって，平面上の点は，原点のまわりにθだけ回転し，さらに原点との距離がr倍となる点に移るので，$\mathrm{Q}_1(1,\ 0)$に対し，$\mathrm{Q}_{n+1}=f(\mathrm{Q}_n)$から，

$\mathrm{Q}_n(r^{n-1}\cos(n-1)\theta,\ r^{n-1}\sin(n-1)\theta)$

すると，$\triangle\mathrm{OQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}$の面積$S(n)$は, (1)より,

$$S(n)=\frac{1}{2}r^{n-1}r^n|\sin\theta|=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+1})^{2n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{2}(a^2+1)^{n-1}$$

(3) $A^{-1}=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$より，$A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} 2\cos\theta+7\sin\theta \\ -2\sin\theta+7\cos\theta \end{pmatrix}$となり，条件から，

$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{1}{r}(2\cos\theta+7\sin\theta)<\dfrac{5}{2}$

(1)より，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{7}{\sqrt{a^2+1}}\right)<\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{2a+7}{a^2+1}<\dfrac{5}{2}$であるので,

$3a^2+3\leqq 4a+14$………③，$5a^2+5>4a+14$………④

③より，$3a^2-4a-11\leqq 0$となり，$a>0$なので，$0<a\leqq\dfrac{2+\sqrt{37}}{3}$

④より，$5a^2-4a-9>0$，$(5a-9)(a+1)>0$となり，$a>0$なので，$a>\dfrac{9}{5}$

すると，$\dfrac{8}{3}<\dfrac{2+\sqrt{37}}{3}<3$から，③④を満たす自然数$a$は，$a=2$である。

このとき$S(n)>10^{10}$から，$\dfrac{1}{2}\cdot 5^{n-1}>10^{10}$，$5^n>10^{11}$となり，両辺の対数をとって，

$n(\log_{10}5)>11$，$n(1-\log_{10}2)>11$，$n>\dfrac{11}{1-\log_{10}2}$………⑤

ここで，$0.3<\log_{10}2<0.31$から，$15.7<\dfrac{11}{0.7}<\dfrac{11}{1-\log_{10}2}<\dfrac{11}{0.69}<16$

よって，⑤を満たす最小のnは$n=16$である。

［解 説］

相似変換が題材となっています。この意味を考えると，A^nの計算は，必要不可欠ではありません。

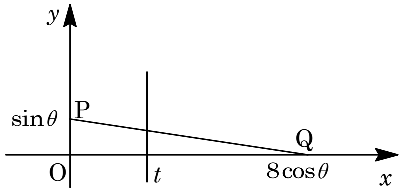
$\boxed{2}$

問題のページへ

まず，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，$x=0$　$(0\leqq y\leqq 1)$ である。

また，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，

$$y=-\frac{\tan\theta}{8}x+\sin\theta\quad(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$$



さて，直線 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 8\cos\theta)$ 上における y のとりうる値の範囲を求める。

ここで，$f(\theta)=-\dfrac{t}{8}\tan\theta+\sin\theta$ とおくと，

$$f'(\theta)=-\frac{t}{8}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}+\cos\theta=\frac{8\cos^3\theta-t}{8\cos^2\theta}$$

すると，$0\leqq t\leqq 8\cos\theta$ から $0\leqq\sqrt[3]{t}\leqq 2\sqrt[3]{\cos\theta}$ となり，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}$ となる α がただ 1 つ存在する。また，$8\cos\beta=t$ $\left(\cos\beta=\dfrac{t}{8}\right)$ とおくと，$\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}\geqq\dfrac{t}{8}$ から，$\alpha\leqq\beta$ である。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

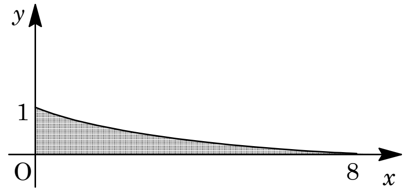
これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，

$$f(\alpha)=-\frac{t}{8}\tan\alpha+\sin\alpha=\sin\alpha\left(-\frac{t}{8\cos\alpha}+1\right)=\sqrt{1-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}}\left(-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}+1\right)$$

$$=\frac{\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{4-t^{\frac{2}{3}}}{4}=\frac{1}{8}\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって，線分 PQ が通過する部分 D は，

$$0\leqq y\leqq\frac{1}{8}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$



したがって，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^8\frac{1}{64}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{\pi}{64}\int_0^8\left(64-48x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\left[64x-48\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+12\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^8=\frac{\pi}{64}\left(2^9-\frac{9}{5}\cdot 2^9+\frac{9}{7}\cdot 2^9-\frac{1}{3}\cdot 2^9\right)$$

$$=2^3\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{105}\pi$$

［解　説］

線分の通過領域を求める際に，1 文字を固定して処理する有名問題です。なお，定積分の数値計算が面倒なので，変数を取り直した方がよかったかもしれません。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x-p)^2+q$ に対して，条件から，$f(0)=1$ となり，$p^2+q=1$ ………①

次に，$y=f(x)$ と $y=x$ を連立して，

$$(x-p)^2+q=x\ ,\ x^2-(2p+1)x+p^2+q=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x>0$ で，$y=f(x)$ と $y=x$ が接することより，$f(x)=x$ は正の重解をもち，

$$D=(2p+1)^2-4(p^2+q)=0\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ 2p+1>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$(2p+1)^2=4$ となり，④から，$2p+1=2$，$p=\dfrac{1}{2}$

①に代入すると，$q=\dfrac{3}{4}$ となり，このとき②の重解は，$x=\dfrac{2p+1}{2}=1$

よって，接点の座標は，$(1,\ 1)$ である。

(2)　$g(x)=f_2(x)-f_1(x)$ とおくと，条件より $g(\alpha)>0$ かつ $g(\beta)>0$ であり，

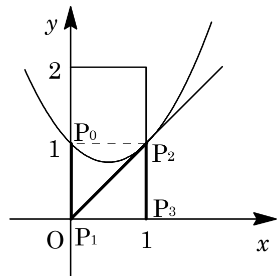
$$g(x)=(x-p_2)^2+q_2-(x-p_1)^2-q_1=-2(p_2-p_1)x+{p_2}^2-{p_1}^2+q_2-q_1$$

(i)　$p_2\geqq p_1$ のとき　$g(x)$ は単調に減少し，$\alpha<x<\beta$ において，$g(x)\geqq g(\beta)>0$

(ii)　$p_2<p_1$ のとき　$g(x)$ は単調に増加し，$\alpha<x<\beta$ において，$g(x)\geqq g(\alpha)>0$

(i)(ii)より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において $f_1(x)<f_2(x)$ が成り立つ。

(3)　点 $(0,\ 1)$ を通り，直線 $y=x$ と点 $(1,\ 1)$ で接する放物線は, (1)より，

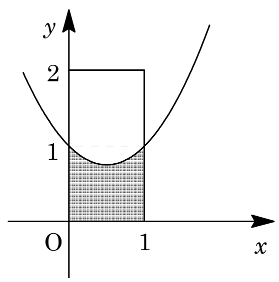


$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2-x+1$$

この放物線を $y=f_1(x)$ とおき，放物線 $y=f(x)$ が，不等式 $1=f_1(0)<f(0)$ かつ $1=f_1(1)<f(1)$ を満たすとすると, (2)より，$y=f(x)$ は折れ線 L と共有点をもたない。

また，$f(0)\leqq f_1(0)$ または $f(1)\leqq f_1(1)$ が満たされるとき，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ は，折れ線 L と共有点をもつ。

そこで，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ を，折れ線 L と共有点がないように動かすとき，$y=f(x)$ が通過する領域は，$y=f_1(x)$ の上部全体となる。



したがって，長方形 R から，上記の通過領域 T を除いた領域 S を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含む。また，この領域 S の面積は,

$$\int_0^1(x^2-x+1)dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

［解　説］

(3)の論理展開は感覚的すぎると思いながらも，この程度の記述に留めました。

4

問題のページへ

(1)　三角不等式を用いて，$|px+q|\leqq|px|+|q|=|p||x|+|q|$ ………①

また, $x\geqq 1$ であれば,

$$|p||x|+|q|=|p|x+|q|\leqq|p|x+|q|x=(|p|+|q|)x \cdots\cdots\cdots ②$$

そこで，$|p|+|q|=r$ とおくと，①②より，$|px+q|\leqq rx$ となる。

(2)　まず，$f(x)-(x+k)^3=(x^3+ax^2+bx+c)-(x+k)^3$

$$=(a-3k)x^2+(b-3k^2)x+(c-k^3)$$

$k=\dfrac{a}{3}>0$ の場合は，$\left|f(x)-(x+k)^3\right|=\left|\left(b-\dfrac{a^2}{3}\right)x+\left(c-\dfrac{a^3}{27}\right)\right|$

そこで, $x\geqq 1$ のとき，$\left|b-\dfrac{a^2}{3}\right|+\left|c-\dfrac{a^3}{27}\right|=l$ とおくと, (1)より,

$$\left|f(x)-(x+k)^3\right|\leqq lx \cdots\cdots\cdots ③$$

また, a, b, c は正の定数より，$x\geqq 1$ のとき,

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2+\sqrt[3]{f(x)}(x+k)+(x+k)^2\geqq\left(\sqrt[3]{x^3}\right)^2+\sqrt[3]{x^3}\cdot x+x^2\geqq x^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より,

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right|=\frac{\left|f(x)-(x+k)^3\right|}{\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2+\sqrt[3]{f(x)}(x+k)+(x+k)^2}\leqq\frac{lx}{x^2}=\frac{l}{x}$$

(3)　正の数 k の整数部分を $[k]$，小数部分を α とすると，$0\leqq\alpha<1$ である。

さて, (2)より，すべての自然数 n に対して,

$$\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]-\alpha\right|\leqq\frac{l}{n},\ \ \alpha-\frac{l}{n}\leqq\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]\leqq\alpha+\frac{l}{n} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

また，区間 $I_n:\alpha-\dfrac{l}{n}\leqq x\leqq\alpha+\dfrac{l}{n}$ とおくと，$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$ となる。

(i)　$0<\alpha<1$ のとき

区間 $J:0<x<1$ とすると，$n\geqq n_0$ において $J\supset I_n$ となる n_0 が存在する。しかし, $\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]$ は整数であることから，⑤は成立しない。

(ii)　$\alpha=0$ のとき

⑤より，$-\dfrac{l}{n}\leqq\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]\leqq\dfrac{l}{n}$ ………⑥

ここで，$[k]=m>0$ とおくと，十分大きな n に対しても⑥が成立することより,

$$\sqrt[3]{f(n)}-n-m=0,\ \ f(n)=(n+m)^3 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

すると, 3 次関数 $f(x)$ に対し，任意の自然数 n に対して⑦が成立するので,

$$f(x)=(x+m)^3$$

［解　説］

(3)は, k が整数であることを示すのがポイントですが，その記述方法は……。

5

問題のページへ

(1) 漸化式 $a_1=0$，$a_2=r$，$a_{n+1}=a_n+r_n(a_n-a_{n-1})$　$(n\geqq 2)$……①に対して,

$r_n=\dfrac{r}{2}$ (硬貨を投げ表がでたとき)

$r_n=\dfrac{1}{2r}$ (硬貨を投げ裏がでたとき)

まず, 硬貨を 1 回投げ表がでたとき，$a_3=a_2+\dfrac{r}{2}(a_2-a_1)=r+\dfrac{r}{2}\cdot r=r+\dfrac{r^2}{2}$

また, 硬貨を 1 回投げ裏がでたとき，$a_3=a_2+\dfrac{1}{2r}(a_2-a_1)=r+\dfrac{1}{2r}\cdot r=r+\dfrac{1}{2}$

よって，a_3 の期待値 p_3 は,

$$p_3=\frac{1}{2}\left(r+\frac{r^2}{2}+r+\frac{1}{2}\right)=\frac{r^2}{4}+r+\frac{1}{4}$$

さらに，もう一度，硬貨を投げると,

(i)　表→表のとき　$a_4=a_3+\dfrac{r}{2}(a_3-a_2)=r+\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{r^2}{2}=r+\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{r^3}{4}$

(ii)　表→裏のとき　$a_4=a_3+\dfrac{1}{2r}(a_3-a_2)=r+\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{r^2}{2}=\dfrac{5}{4}r+\dfrac{r^2}{2}$

(iii)　裏→表のとき　$a_4=a_3+\dfrac{r}{2}(a_3-a_2)=r+\dfrac{1}{2}+\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4}r$

(iv)　裏→裏のとき　$a_4=a_3+\dfrac{1}{2r}(a_3-a_2)=r+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{1}{2}=r+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4r}$

よって，a_4 の期待値 p_4 は,

$$p_4=\frac{1}{4}\left(r+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{4}+\frac{5}{4}r+\frac{r^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}r+r+\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}\right)$$
$$=\frac{r^3}{16}+\frac{r^2}{4}+\frac{9}{8}r+\frac{1}{4}+\frac{1}{16r}$$

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$……②とおくと，$b_1=r-0=r$ で，①から，$b_n=r_nb_{n-1}$ となり,

$$b_n=b_1\cdot r_2r_3\cdots r_n=r\cdot r_2r_3\cdots r_n\quad(n\geqq 2)$$

ところで, 硬貨を $n-1$ 回投げたとき, 表が k 回, 裏が $n-1-k$ 回でたとすると,

$$b_n=r\left(\frac{r}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2r}\right)^{n-1-k}=\frac{r^{2k-n+2}}{2^{n-1}}$$

また, このときの確率は，${}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1-k}={}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となる。

そこで，b_n の期待値を q_n とするとき,

$$q_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r^{2k-n+2}}{2^{n-1}}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{r^{-n+2}}{4^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\,r^{2k}=\frac{r}{(4r)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\,r^{2k}$$
$$=\frac{r}{(4r)^{n-1}}(1+r^2)^{n-1}=r\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{n-1}$$

なお, この式は $n=1$ のときも成立する。

さて, ②に対して, 両辺の期待値をとると，$q_n=p_{n+1}-p_n$………③

$p_1=0$ なので，③より，

$$p_n=p_1+\sum_{i=1}^{n-1}q_i=r\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{i-1}\quad(n\geqq 2)$$

(i)　$\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\neq 1$　$(r\neq 2\pm\sqrt{3})$ のとき

$$p_n=r\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)}=\frac{-4r^2}{r^2-4r+1}\left\{1-\left(\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

(ii)　$\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}=1$　$(r=2\pm\sqrt{3})$ のとき

$$p_n=r(n-1)$$

(3)　数列 $\{p_n\}$ が収束する条件は，$r>0$ から，

(i)　$r\neq 2\pm\sqrt{3}$ のとき

$\frac{1}{4r}+\frac{r}{4}<1$，すなわち $r^2-4r+1<0$ より，$2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$

(ii)　$r=2\pm\sqrt{3}$ のとき

$\lim_{n\to\infty}p_n=\infty$ より，不適である。

(i)(ii)より，求める条件は，$2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$

(4)　(3)のとき，$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{-4r^2}{r^2-4r+1}=\frac{4}{-1+\frac{4}{r}-\frac{1}{r^2}}=\frac{4}{-\left(\frac{1}{r}-2\right)^2+3}$

ここで，$2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$ より，$2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}<\frac{1}{r}<\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ となり，

$$0<-\left(\frac{1}{r}-2\right)^2+3\leqq 3$$

したがって，$\frac{1}{r}=2\left(r=\frac{1}{2}\right)$ のとき，$\lim_{n\to\infty}p_n$ は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

［解　説］

③式は，「和の期待値は期待値の和」という考え方を用いています。阪大の出題範囲からすると，掟破りですが。