1

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表し，3 次式 $f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m|\leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上で考える。不等式 $y<-x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y|\leqq 1$ の表す領域を E とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。

(2) $\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする。$S(a,\ b)$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3) 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ に対し，$f'(x)=3x^2+2lx+m$

さて，$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる条件は，$f(-1)=f'(-1)=0$ から，

$$-1+l-m+n=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ 3-2l+m=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$m=2l-3\cdots\cdots$③となり，①に代入して，

$$n=1-l+2l-3=l-2\cdots\cdots\cdots④$$

③④を満たす 1 以上 6 以下の整数 l, m, n は，

$$(l,\ m,\ n)=(3,\ 3,\ 1),\ (4,\ 5,\ 2)$$

よって，求める確率は，$\dfrac{2}{6^3}=\dfrac{1}{108}$ となる。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつ条件に等しいので，

$$D/4=l^2-3m>0,\ \ m<\frac{l^2}{3}\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を満たす 1 以上 6 以下の整数 l, m は，

$(l,\ m)=(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),$
$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),$
$(6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$

n の値は任意なので，求める確率は，$\dfrac{20\times6}{6^3}=\dfrac{5}{9}$ となる。

［解　説］

確率の基本問題です。(1)は，直接的に割り算をして余りが 0 となる条件を求めても OK です。

2　問題のページへ

(1)　n が偶数のとき $n=2k$ とおくと，条件(ii)より，必要条件として，

$$|k-2|\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4$$

さらに，条件(i)を考え合わせると，$2\leqq k\leqq 4$ となり，$n=4,\ 6,\ 8$ である。

(a)　$n=4$ のとき　1, 4 を除く正の約数は 2 だけであり，条件を満たす。

(b)　$n=6$ のとき　1, 6 を除く正の約数は 2, 3 であり，条件を満たす。

(c)　$n=8$ のとき　1, 8 を除く正の約数は 2, 4 であり，条件を満たす。

(a)～(c)より，$n=4,\ 6,\ 8$

(2)　n が 7 の倍数のとき, (1)と同様にすると,

$$|k-7|\leqq 2,\ 5\leqq k\leqq 9$$

(1)より，偶数を除くと，$n=35,\ 49,\ 63$ である。

(a)　$n=35$ のとき　1, 35 を除く正の約数は 5, 7 であり，条件を満たす。

(b)　$n=49$ のとき　1, 49 を除く正の約数は 7 だけであり，条件を満たす。

(c)　$n=63$ のとき　1, 63 を除く正の約数は 3, 7, 9, 21 であり，条件に反する。

(a)～(c)より，$n=35,\ 49$

(3)　$31^2=961$，$37^2=1369$ に注目して, (1), (2)と同様に考える。

(Ⅰ) n が 3 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=3^2,\ 3\times5$

(Ⅱ) n が 5 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=5\times3,\ 5^2,\ 5\times7$

(Ⅲ) n が 11 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=11^2,\ 11\times13$

(Ⅳ) n が 13 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=13\times11,\ 13^2$

(Ⅴ) n が 17 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=17^2,\ 17\times19$

(Ⅵ) n が 19 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=19\times17,\ 19^2$

(Ⅶ) n が 23 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=23^2$

(Ⅷ) n が 29 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=29^2,\ 29\times31$

(Ⅸ) n が 31 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=31\times29,\ 31^2$

(Ⅰ)～(Ⅸ)に, (1), (2)の結果を合わせると, $2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で条件を満たす n は,

$$n=4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 15,\ 25,\ 35,\ 49,\ 121,\ 143,\ 169,\ 289,\ 323,\ 361,\ 529,\ 841,\ 899,\ 961$$

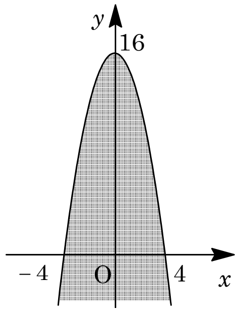
［解 説］

(1)と(2)が実験となっています。(3)では，前問の勢いが残ってしまい，同じ調子で羅列しました。

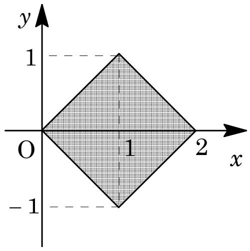
3

問題のページへ

(1)　領域 D は，放物線 $y=-x^2+16$ ……①の下部であり，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



　領域 E は，中心が点$(1,\ 0)$である正方形$|x-1|+|y|=1$の内部であり，右下図の網点部となる。ただし，境界線は含む。



(2)　領域 D に点$\mathrm{A}(a,\ b)$が属するので，$b<-a^2+16$ ………②

　さて，点$\mathrm{A}(a,\ b)$を通り傾きが$-2a$の直線の直線は，

$$y-b=-2a(x-a),\ \ y=-2ax+2a^2+b\ \cdots\cdots\cdots③$$

　①③を連立して，$-x^2+16=-2ax+2a^2+b$

$$x^2-2ax+2a^2+b-16=0$$

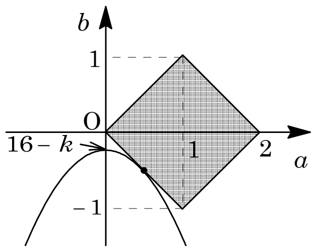
　②より，異なる実数解をもち，$x=a\pm\sqrt{-a^2-b+16}$

　この解を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおくと，①③で囲まれた部分の面積$S(a,\ b)$は，

$$\begin{aligned}S(a,\ b)&=\int_\alpha^\beta -(x^2-2ax+2a^2+b-16)\,dx\\&=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3\end{aligned}$$

(3)　点$\mathrm{A}(a,\ b)$が領域 E を動くとき，$|a-1|+|b|\leqq 1$ ………④

　また，(2)より，$-a^2-b+16=k$ ……⑤とおくと，$S(a,\ b)=\frac{4}{3}(\sqrt{k})^3$となり，$k$ が最大となるとき，$S(a,\ b)$は最大値をとる。そこで，ab 平面上において，④と⑤が共有点をもつ k の最大値を求める。



　さて，⑤から$b=-a^2+16-k$ ……⑥となり，④の境界線$b=-a$と接するのは，⑥から$b'=-2a$となるので，

$$-2a=-1,\ \ a=\frac{1}{2}$$

　このとき，$b=-\frac{1}{2}$となり，$16-k\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

$$k\leqq 16+\frac{1}{4}=\frac{65}{4}$$

　以上より，$k=\frac{65}{4}$のとき，$S(a,\ b)$は最大値$\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{65}{4}}\right)^3=\frac{65}{6}\sqrt{65}$をとる。

［解　説］

領域が絡んだ微積分の標準レベルの総合問題です。