1　　解答解説のページへ

$a>0$ とする。C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が C_1 上を動き，点 Q が C_2 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を a を用いて表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　$l,\ m$ を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m|\leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 平面 $z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2) 立体 V の体積を求めよ。

4　　解答解説のページへ

5 次式 $f(x)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ （p, q, r, s, t は実数）について考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ が等差数列であることと，

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m \quad (l,\ m \text{ は実数})$$

と書けることは互いに同値であることを示せ。

(2) $f(x)$ は(1)の条件を満たすものとする。α を実数，k を 3 以上の自然数とする。k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

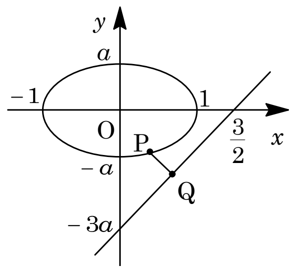
1個のさいころを3回続けて投げるとき，1回目に出る目を l，2回目に出る目を m，3回目に出る目を n で表すことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が存在する確率を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が，$x>-1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　曲線$C_1 : x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$上の点 P を，$\theta$を任意の実数として，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$と表す。

また，直線$C_2 : y=2ax-3a$上の点 Q に対して，線分 PQ の長さが最小となるのは，PQ とC_2が垂直になるときである。直線C_2は$2ax-y-3a=0$から，このときの線分 PQ の長さをhとすると，

$$h=\frac{|2a\cos\theta-a\sin\theta-3a|}{\sqrt{4a^2+1}}=\frac{a|2\cos\theta-\sin\theta-3|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

ここで，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$とおくと，

$$|2\cos\theta-\sin\theta-3|=|\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)-3|=3-\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$

θは任意の実数から，$\sin(\theta+\alpha)=1$のときhは最小となり，最小値$f(a)$は，

$$f(a)=\frac{(3-\sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

(2)　$$\lim_{a\to\infty}f(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{(3-\sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2+1}}=\lim_{a\to\infty}\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{a^2}}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

［解 説］

点と直線の距離の公式を用いるか，楕円C_1の接線と直線C_2が平行になる条件を利用するか，と迷いましたが，題意を考えて前者を採用しました。

2

問題のページへ

(1)　nが偶数のとき$n=2k$とおくと，条件(ii)より，必要条件として，

$$|k-2|\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4$$

さらに，条件(i)を考え合わせると，$2\leqq k\leqq 4$となり，$n=4,\ 6,\ 8$である。

(a)　$n=4$のとき　1, 4を除く正の約数は2だけであり，条件を満たす。

(b)　$n=6$のとき　1, 6を除く正の約数は2, 3であり，条件を満たす。

(c)　$n=8$のとき　1, 8を除く正の約数は2, 4であり，条件を満たす。

(a)～(c)より，$n=4,\ 6,\ 8$

(2)　nが7の倍数のとき, (1)と同様にすると,

$$|k-7|\leqq 2,\ 5\leqq k\leqq 9$$

(1)より，偶数を除くと，$n=35,\ 49,\ 63$である。

(a)　$n=35$のとき　1, 35を除く正の約数は5, 7であり，条件を満たす。

(b)　$n=49$のとき　1, 49を除く正の約数は7だけであり，条件を満たす。

(c)　$n=63$のとき　1, 63を除く正の約数は3, 7, 9, 21であり，条件に反する。

(a)～(c)より，$n=35,\ 49$

(3)　$31^2=961$，$37^2=1369$に注目して, (1), (2)と同様に考える。

(Ⅰ) nが3の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=3^2,\ 3\times5$

(Ⅱ) nが5の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=5\times3,\ 5^2,\ 5\times7$

(Ⅲ) nが11の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=11^2,\ 11\times13$

(Ⅳ) nが13の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=13\times11,\ 13^2$

(Ⅴ) nが17の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=17^2,\ 17\times19$

(Ⅵ) nが19の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=19\times17,\ 19^2$

(Ⅶ) nが23の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=23^2$

(Ⅷ) nが29の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=29^2,\ 29\times31$

(Ⅸ) nが31の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=31\times29,\ 31^2$

(Ⅰ)～(Ⅸ)に, (1), (2)の結果を合わせると, $2\leqq n\leqq 1000$の範囲で条件を満たすnは,

$$n=4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 15,\ 25,\ 35,\ 49,\ 121,\ 143,\ 169,\ 289,\ 323,\ 361,\ 529,\ 841,\ 899,\ 961$$

［解 説］

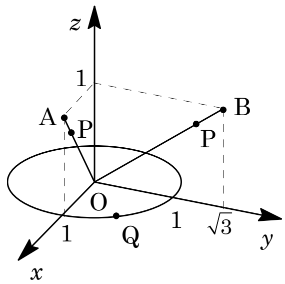
(1)と(2)が実験となっています。(3)も，同じ調子で羅列しています。

3

問題のページへ

(1) $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$ とし，線分 OA 上の点 P を P_a，線分 OB 上の点 P を P_b とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ 0,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_b} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ \sqrt{3}b,\ b)$$



また，点 Q は円 W の周および内部にあるので，φ を任意の実数，$0 \leqq r \leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$

さて，立体 V_A 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{\mathrm{OP}_a} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (a,\ 0,\ a) + (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$= (a + r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ a) \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に，立体 V_B 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{\mathrm{OP}_b} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (0,\ \sqrt{3}b,\ b) + (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$= (r\cos\varphi,\ \sqrt{3}b + r\sin\varphi,\ b) \cdots\cdots\cdots ②$$

そこで，立体 V_A と V_B の平面 $z = \cos\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による切り口を求める。

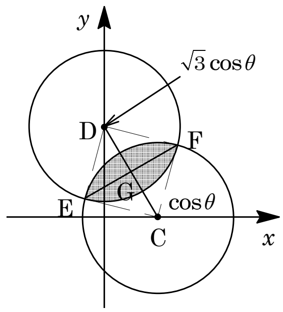
①より，$a = \cos\theta$ から，$x = \cos\theta + r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$z = \cos\theta$

これより，立体 V_A の切り口は，平面 $z = \cos\theta$ 上で，$(x - \cos\theta)^2 + y^2 = r^2$ となり，中心 $\mathrm{C}(\cos\theta,\ 0,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

同様に，②より，$b = \cos\theta$ から，$x = r\cos\varphi$，$y = \sqrt{3}\cos\theta + r\sin\varphi$，$z = \cos\theta$

これより，立体 V_B の切り口は，平面 $z = \cos\theta$ 上で，$x^2 + (y - \sqrt{3}\cos\theta)^2 = r^2$ となり，中心 $\mathrm{D}(0,\ \sqrt{3}\cos\theta,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

よって，V_A と V_B の共通部分 V を，平面 $z = \cos\theta$ によって切断した切り口は，右図の網点部となる。



ここで，2 円の交点を E, F とし，線分 EF と CD の交点を G とおくと，中心間距離 $\mathrm{CD} = 2\cos\theta$ となることより，$\mathrm{CG} = \mathrm{DG} = \cos\theta$ である。

すると，$\angle\mathrm{ECG} = \angle\mathrm{FCG} = \angle\mathrm{EDG} = \angle\mathrm{FDG} = \theta$ となり，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta\right) = 2\theta - \sin 2\theta$$

(2) 立体 V の体積 U は，$U = \displaystyle\int_0^1 S\,dz$ と表せ，$z = \cos\theta$ とおくと，$dz = -\sin\theta\,d\theta$ となり，$z = 0 \to 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{2} \to 0$ である。

$$U = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (2\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\sin\theta - \sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta=-\Big[\,\theta\cos\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\Big[\,\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos3\theta-\cos\theta)\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}\sin3\theta-\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot1=\frac{2}{3}$$

以上より，立体 V の体積は，$U=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

断面積を積分することによって体積を求める問題です。数式的に処理をして断面図を描きましたが，図形的に意味を考える方がすばやく結論に到達します。ただ，プロセスの述べ方が難ですが。

4

問題のページへ

(1)　数列$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$が等差数列であるとき，$f(0)=m$，公差をlとおくと，$f(1)=m+l$，$f(2)=m+2l$，$f(3)=m+3l$，$f(4)=m+4l$

ここで，$g(x)=f(x)-(m+lx)$とおくと，$g(x)$は5次式であり，

$$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$$

よって，$g(x)$は$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$で割り切れ，$a\neq 0$とし，

$$g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

すると，$f(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$となり，$x^5$の係数を比べると$a=1$である。

すなわち，$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$ ………①

逆に，①のとき，$f(0)=m$，$f(1)=m+l$，$f(2)=m+2l$，$f(3)=m+3l$，$f(4)=m+4l$となり，数列$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$は等差数列である。

(2)　条件より，$f(\alpha)$，$f(\alpha+1)$，$f(\alpha+2)$が等差数列であることが必要であり，

$$2f(\alpha+1)=f(\alpha)+f(\alpha+2) \text{ ………②}$$

ここで，

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\alpha+2)&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)+l\alpha+m\\&\quad+(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)+l\alpha+2l+m\\&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha^2-4\alpha+14)+2l\alpha+2l+2m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2f(\alpha+1)&=2(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)+2l\alpha+2l+2m\\&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha^2-4\alpha-6)+2l\alpha+2l+2m\end{aligned}$$

すると，②から，$20\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)=0$となり，$\alpha=0,\ 1,\ 2$

また，$f(5)=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+5l+m=120+5l+m$となり，数列$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$は等差数列とはなりえない。

(i)　$\alpha=0$のとき　$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$は等差数列から，

$$(\alpha,\ k)=(0,\ 5),\ (0,\ 4),\ (0,\ 3)$$

(ii)　$\alpha=1$のとき　$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$は等差数列から，

$$(\alpha,\ k)=(1,\ 4),\ (1,\ 3)$$

(iii)　$\alpha=2$のとき　$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$は等差数列から，

$$(\alpha,\ k)=(2,\ 3)$$

［解　説］

(1)の証明は，問題文に暗示されているように，因数定理の利用がポイントです。また，(2)については，必要条件から絞り込むという方法をとっています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$L=\lim_{x\to-1}\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が存在する必要条件は，$x\to-1$ のとき $lx^2+mx+n\to0$

$$l-m+n=0,\ m=l+n\cdots\cdots\cdots①$$

逆に，①のとき，$L=\lim_{x\to-1}\dfrac{lx^2+(l+n)x+n}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(lx+n)}{x+1}=-l+n$

したがって，①を満たす $(l,\ m,\ n)$ を求めると，

(i)　$m=2$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1)$

(ii)　$m=3$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

(iii)　$m=4$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$

(iv)　$m=5$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$

(v)　$m=6$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$

(i)～(v)より，①を満たす確率は，$\dfrac{15}{6^3}=\dfrac{5}{72}$ である。

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{(2lx+m)(x+1)-(lx^2+mx+n)}{(x+1)^2}=\frac{lx^2+2lx+m-n}{(x+1)^2}$$

$x>-1$ で極値をとる条件は，この範囲で $f'(x)$ の符号が変化することである。

そこで，$g(x)=lx^2+2lx+m-n$ とおくと，$g(x)$ のグラフの軸が $x=-1$ から，求める条件は，

$$g(-1)=l-2l+m-n=-l+m-n<0,\ m<l+n\cdots\cdots\cdots②$$

さて，(1)より，$m=l+n$ を満たす $(l,\ m,\ n)$ は 15 通りある。

また，$m>l+n$ を満たす $(l,\ m,\ n)$ を求めると，

(i)　$m=3$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1)$

(ii)　$m=4$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

(iii)　$m=5$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$

(iv)　$m=6$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$

(i)～(iv)より，$m>l+n$ を満たす $(l,\ m,\ n)$ は 20 通りある。

以上より，②を満たす確率は，$1-\dfrac{15+20}{6^3}=\dfrac{181}{216}$ である。

［解 説］

最初，(2)は直接的に数えましたが，ここはやはり余事象でしょう。