1

解答解説のページへ

xy 平面において，点$(x_0,\ y_0)$と直線$ax+by+c=0$の距離は，$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$である。これを証明せよ。

2

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1)　$\log_{\frac{1}{4}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}} c$ となる確率を求めよ。

(2)　$2^a + 2^b + 2^c$ が 3 の倍数となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。

1

問題のページへ

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から，直線 $l: ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$ とする。また，直線 l の法線ベクトルを $\vec{n}$ とおくと，$\vec{n}=(a,\ b)$ である。

さて，条件より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \vec{n}$ なので，k を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\vec{n}$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n},\ (x_1,\ y_1)=(x_0,\ y_0)+k(a,\ b) \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 Q は直線 l 上にあることから，$ax_1+by_1+c=0 \cdots\cdots\cdots ②$

①を②に代入すると，$a(x_0+ka)+b(y_0+kb)+c=0$ となり，

$$(a^2+b^2)k+ax_0+by_0+c=0,\ k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

以上より，点 P と直線 l の距離は，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|k||\vec{n}|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

［解 説］

点と直線の距離の公式の証明問題です。上の解答例では，法線ベクトルを利用してボリュームを縮小しています。

2

問題のページへ

(1)　a, b, c は 6 以下の自然数であり，$\log_{\frac{1}{4}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}} c$ より，

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}(a+b)}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}} > \log_{\frac{1}{2}} c,\ \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}} c,\ \log_{\frac{1}{2}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}} c^2$$

よって，$a+b<c^2$ ……(＊)となり，(＊)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組の個数を求める。

(i)　$c=1$ のとき　(＊)より，$a+b<1$ となり，$(a,\ b)$ は存在しない。

(ii)　$c=2$ のとき　(＊)より，$a+b<4$ となり，$a+b$ の値が 2, 3 のとき，$(a,\ b)$ の組は，それぞれ 1, 2 個ある。よって，$(a,\ b)$ の組の個数は，$1+2=3$ である。

(iii)　$c=3$ のとき　(＊)より，$a+b<9$ となり，$a+b$ の値が 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 のとき，$(a,\ b)$ の組は，それぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5 個ある。よって，$(a,\ b)$ の組の個数は，$1+2+3+4+5+6+5=26$ である。

(iv) $c \geqq 4$ のとき　$c=4,\ 5,\ 6$ のとき，(＊)より，それぞれ $a+b<16$，$a+b<25$，$a+b<36$ となり，どんな $(a,\ b)$ の組でも成立する。よって，$(a,\ b)$ の組の個数は，$6^2\times 3=108$ である。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{3+26+108}{6^3}=\dfrac{137}{216}$ である。

(2)　a の値と 2^a を 3 で割った余り r_a の関係は，右表のようになる。

a	1	2	3	4	5	6
r_a	2	1	2	1	2	1

これより，$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となるのは，

$(r_a,\ r_b,\ r_c)=(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2)$

よって，その確率は，$\left(\dfrac{3}{6}\right)^3+\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

指数・対数と確率の融合問題ですが，内容は基本的です。

3　　問題のページへ

曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ ……①と直線 $y=mx+4$ ……②に対して,

(a)　$x\geqq 0$ のとき　①より，$y=x^2+x+4-3x=x^2-2x+4$ ………③

②との共有点は，$x^2-2x+4=mx+4$ より，$x=0,\ m+2$

$m\geqq -2$ のとき $x=0,\ m+2$，$m<-2$ のとき $x=0$

(b)　$x\leqq 0$ のとき　①より，$y=x^2+x+4+3x=x^2+4x+4$ ………④

②との共有点は，$x^2+4x+4=mx+4$ より，$x=0,\ m-4$

$m\leqq 4$ のとき $x=0,\ m-4$，$m>4$ のとき $x=0$

(a)(b)より，m の値で場合分けをし，①②で囲まれる部分の面積を S とすると,

(i)　$m<-2$ のとき

$$S=\int_{m-4}^{0}\{mx+4-(x^2+4x+4)\}dx=-\int_{m-4}^{0}x(x-m+4)dx=\frac{1}{6}(4-m)^3$$

(ii)　$-2\leqq m\leqq 4$ のとき

$$S=\int_{m-4}^{0}\{mx+4-(x^2+4x+4)\}dx+\int_{0}^{m+2}\{mx+4-(x^2-2x+4)\}dx$$

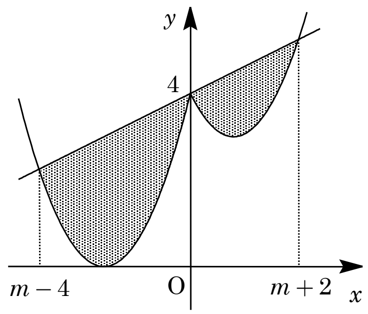
$$=-\int_{m-4}^{0}x(x-m+4)dx-\int_{0}^{m+2}x(x-m-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(4-m)^3+\frac{1}{6}(m+2)^3$$

$$=3m^2-6m+12$$

$$=3(m-1)^2+9$$

よって，$m=1$ のとき S は最小値をとる。



(iii)　$m>4$ のとき

$$S=\int_{0}^{m+2}\{mx+4-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$=-\int_{0}^{m+2}x(x-m-2)dx=\frac{1}{6}(m+2)^3$$

(i)〜(iii)より，S は m について連続なので，$m=1$ のとき S は最小値をとる。

［解　説］

定積分と面積に関する基本題です。微分の出番もありませんでした。