1

解答解説のページへ

三角関数の極限に関する公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

不等式 $1 \leqq \bigl||x|-2\bigr|+\bigl||y|-2\bigr| \leqq 3$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。n 個の球 K_1, K_2, …, K_n と n 個の空の箱 H_1, H_2, …, H_n がある。以下のように, K_1, K_2, …, K_n の順番に, 球を箱に 1 つずつ入れていく。

まず, 球 K_1 を箱 H_1, H_2, …, H_n のどれか 1 つに無作為に入れる。次に, 球 K_2 を, 箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ, 箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

一般に, $i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について, 球 K_i を箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ, 箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

(1)　K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

(2)　K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。

1

問題のページへ

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x<x<\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ が成り立つので，

$$\frac{\sin x}{x}<1<\frac{\sin x}{x\cos x},\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ となる。

また，$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき，$(*)$より，$\cos(-x)<\dfrac{\sin(-x)}{-x}<1$ となり，

$$\cos x<\frac{-\sin x}{-x}<1,\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

これより，$x\to-0$ のとき，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ となる。

以上より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が成り立つ。

さて，$f(x)=\sin x$ とおくと，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\frac{2x+h}{2}=1\cdot\cos x=\cos x$$

［解　説］

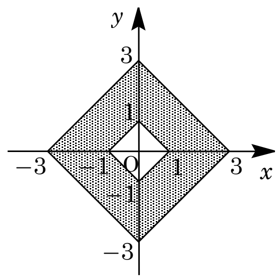
出題意図がよくわからないので，不等式を前提に，解答例を記しています。

2

問題のページへ

まず，$f(x,\ y)=||x|-2|+||y|-2|$とおくと，

$$f(x,\ -y)=f(-x,\ y)=f(x,\ y)$$

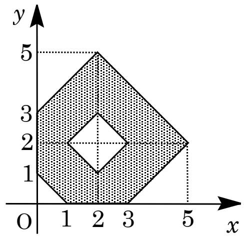


これより，$1\leqq f(x,\ y)\leqq 3$の表す領域は，x軸対称かつy軸対称である。

そこで，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$の場合について考える。

このとき，$1\leqq f(x,\ y)\leqq 3$の表す不等式は，

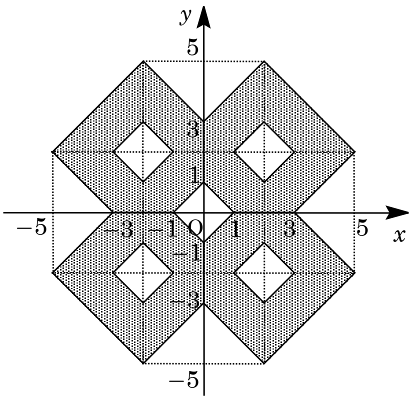
$$1\leqq |x-2|+|y-2|\leqq 3\ \cdots\cdots\cdots①$$



さて，①で表される領域は，不等式$1\leqq |x|+|y|\leqq 3$……②で表される領域を，x軸方向に2，y軸方向に2だけ平行移動したものである。

まず，不等式②で表される領域は，右上図の網点部となる。

すると，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$において，不等式①で表す領域は，右図のようになる。



この領域をx軸対称かつy軸対称した領域が，不等式$1\leqq f(x,\ y)\leqq 3$の表す領域である。

すなわち，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

［解 説］

言葉で書くと，一番上の図を平行移動して後，座標軸に関してパタパタ折り返していくだけですが，これを図示していくのには時間がかかってしまいます。

3

問題のページへ

まず，正の整数 n を 3 で割った余りと，n^3，n^5，n^7 をそれぞれ 3 で割った余りは等しくなる。

そこで, n を 3 で割った余りと，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 をそれぞれ 3 で割った余りを表にまとめると，右のようになる。

n	0	1	2
$n+1$	1	2	0
n^3+3	0	1	2
n^5+5	2	0	1
n^7+7	1	2	0

(i)　n を 3 で割った余りが 0 のとき

n^3+3 は 3 の倍数となり，$n^3+3 \geqq 30$ なので，n^3+3 は素数ではない。

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 のとき

n^5+5 は 3 の倍数となり，$n^5+5 \geqq 6$ なので，n^5+5 は素数ではない。

(iii) n を 3 で割った余りが 2 のとき

n^7+7 は 3 の倍数となり，$n^7+7 \geqq 135$ なので，n^7+7 は素数ではない。

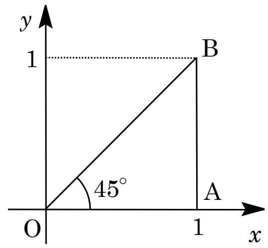
(i)～(iii)より，4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。

［解 説］

n を偶数として，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 を計算していくと，素数でないのは 3 の倍数という共通項が見つかります。すると，行うべきことは明白です。なお, $n+1$ については, 結果として，必要ありませんでした。

$\boxed{4}$

問題のページへ



3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐 V の側面上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$とすると，

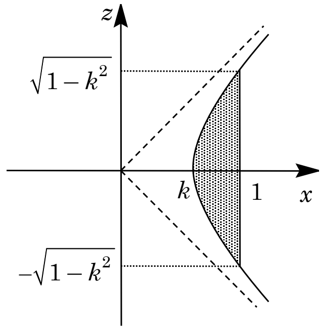
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos 45^\circ$$

$$x=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

$$x^2=y^2+z^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

この円錐 V を y 軸に垂直な平面 $y=k\quad(0\leqq k\leqq 1)$で切断すると，その切り口は，

$$x^2=k^2+z^2,\ \ x^2-z^2=k^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$



そこで，この切り口を y 軸のまわりに 1 回転させると，その形状はドーナツ形になり，その外径を R，内径を r とおくと，

$$R=\sqrt{1^2+(\sqrt{1-k^2})^2}=\sqrt{2-k^2}\ ,\ \ r=k$$

すると，切り口の面積 $S(k)$は，

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(2-k^2-k^2)=2\pi(1-k^2)$$

よって，円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は，xz 平面に関する対称性から，

$$2\int_0^1 S(k)dk=4\pi\int_0^1(1-k^2)dk=4\pi\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=\frac{8}{3}\pi$$

［解　説］

阪大頻出の立体の求積問題です。円錐の回転体が題材ですが，内容は基本事項の組合せです。なお，円錐面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

5　　問題のページへ

(1)　まず，K_1 が入った箱で場合分けをする。

(i)　K_1 が H_1 に入ったとき　K_n は H_n に入る。

(ii)　K_1 が H_n に入ったとき　K_n は H_1 に入る。

(iii)　K_1 が H_i $(2\leqq i\leqq n-1)$ に入ったとき　K_i は H_1，H_{i+1}，…，H_n のどれか 1 つに入る。さらに，K_i が入った箱で場合分けをする。

(a)　K_i が H_1 に入ったとき　K_n は H_n に入る。

(b)　K_i が H_n に入ったとき　K_n は H_1 に入る。

(c)　K_i が H_j $(i+1\leqq j\leqq n-1)$ に入ったとき　K_j は H_1，H_{j+1}，…，H_n のどれか 1 つに入る。

同様に，この操作を繰り返すと，$i<j$ より，K_n は H_1 または H_n のいずれかに入ることになる。

(2)　K_{n-1} が H_{n-1} に入らない，すなわち K_{n-2} までの球が H_{n-1} に入っている場合を考え，この確率を p_n とおく。また，一般的に，K_l が H_m に入ることを $K_l\to H_m$ と表し，$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})$ が入る箱について場合分けをする。

まず，$K_l\to H_l$ となる l が存在しないときを考える。

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})\to(H_2,\ H_3,\ H_4,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{n-(n-2)+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に，$K_l\to H_l$ となる l がただ 1 個だけのときを考える。

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})\to(H_3,\ H_2,\ H_4,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot 1\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{3}$$

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})\to(H_2,\ H_4,\ H_3,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot 1\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{3}$$

他の場合も同様に考えると，$(*)$において，$\dfrac{1}{n-1}$，$\dfrac{1}{n-2}$，$\dfrac{1}{n-3}$，…，$\dfrac{1}{3}$ のうちから 1 つの式を選び，それを 1 に変えて積をとったものが，対応する確率となる。

また，$K_l\to H_l$ となる l が 2 個あるときを考える。

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})\to(H_4,\ H_2,\ H_3,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3}$$

他の場合も同様に考えると，$(*)$において，$\dfrac{1}{n-1}$，$\dfrac{1}{n-2}$，$\dfrac{1}{n-3}$，…，$\dfrac{1}{3}$ のうちから 2 つの式を選び，それを 1 に変えて積をとったものが，対応する確率となる。

さらに，$K_l\to H_l$ となる l が 3 個以上あるときも同様に考えていき，$K_l\to H_l$ と

なる l の個数が最大のとき，すなわち $n-3$ 個であるときを考える。

この場合は，$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2}) \to (H_{n-1},\ H_2,\ H_3,\ H_4,\ \cdots,\ H_{n-2})$ のときとなり，この確率は，$\dfrac{1}{n}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1$ である。

以上，K_{n-2} までの球が H_{n-1} に入っている場合は，これらの 2^{n-3} 通りの場合の総和となり，その確率 p_n は，

$$p_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-2}\right)\left(1+\frac{1}{n-3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

したがって，K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率は，$1-p_n = \dfrac{2}{3}$ である。

［解 説］

どこに解法の糸口を見つければよいのか迷うほどの問題です。(2)では，極端なケースを端緒として考えました。ただ，断続的に睡魔が襲ってきましたが……。