$\boxed{1}$　解答解説のページへ

i は虚数単位とし，実数 a, b は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする。複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_2 とする。

(1)　L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ。

(2)　L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ。

(3)　L_1 と L_2 の交点を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$\cos x+\cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\cos x+\cos y+\cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を挙げよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は，$x = 0$ のとき極大値 M をとり，$x = \alpha$ のとき極小値 m をとるという。ただし $\alpha \neq 0$ とする。このとき, p, q, r, s を α , M, m で表せ。

1

問題のページへ

(1)　$(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+(bx+ay)i$ より，条件から，

$$L_1 : ax-by=2 \cdots\cdots\cdots ①,\ \ L_2 : bx+ay=-3 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$a^2+b^2>0$ より，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ である。これより，①②はともに $x,\ y$ についての1次式なので，L_1 と L_2 は直線である。

(2)　L_1，L_2 の法線ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ とおくと，

$$\overrightarrow{n_1}=(a,\ -b),\ \ \overrightarrow{n_2}=(b,\ a)$$

これより，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=ab+(-ab)=0$ となり，$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ である。

よって，L_1 と L_2 は互いに垂直である。

(3)　①×a＋②×b より，$(a^2+b^2)x=2a-3b$ となり，$x=\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2}$

②×a－①×b より，$(a^2+b^2)y=-3a-2b$ となり，$y=\dfrac{-3a-2b}{a^2+b^2}$

よって，L_1 と L_2 の交点の座標は，$\left(\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2},\ \dfrac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$ である。

［解　説］

形式的には複素数が題材ですが，実質的には，上のような解答例になります。この程度の記述でよいのだろうかと思える問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) 和積公式を適用すると,

$$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\tan\frac{x+y}{2}$$

(2) $x=\frac{\pi}{6}$, $y=-\frac{\pi}{6}$, $z=\pi$ のとき,

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\,,\quad \frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=0$$

よって, $\tan\frac{x+y+z}{3}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$ は成立しない。

［解　説］

(1)は和積公式の適用だけですが, ここは加法定理から示すべきものかもしれません。また, (2)の反例は $x+y=0$ として適当に探しましたが, $x=y=0$ とした方が簡明でした……。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ に対し，$f'(x)=3px^2+2qx+r$

条件より，$f'(x)=0$ の解が $x=0,\ \alpha\ (\alpha\neq 0)$ なので，$p\neq 0$ である。

さて，$f'(0)=0$，$f(0)=M$ から，$r=0$ ……①，$s=M$ ……②

また，$f'(\alpha)=0$，$f(\alpha)=m$ から，

$$3p\alpha^2+2q\alpha+r=0\ \cdots\cdots\text{③},\quad p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s=m\ \cdots\cdots\text{④}$$

すると，①③より，$3p\alpha^2+2q\alpha=0$ となり，$q=-\dfrac{3}{2}p\alpha$ ………⑤

①②④より，$p\alpha^3+q\alpha^2+M=m$ から，⑤を代入して，$p\alpha^3-\dfrac{3}{2}p\alpha^3+M=m$ より，

$$\frac{1}{2}p\alpha^3=M-m,\quad p=\frac{2(M-m)}{\alpha^3}\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

⑤に代入して，$q=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2(M-m)}{\alpha^3}\cdot\alpha=-\dfrac{3(M-m)}{\alpha^2}$ ………⑦

ここで，逆に，①②⑥⑦が成り立つ場合について，

(i)　$p>0$ のとき

$x=0$ のとき極大，$x=\alpha$ のとき極小となることから，$f'(x)$ の符号は $x=0$ の前後で正から負，$x=\alpha$ の前後で負から正と変化するので，$\alpha>0$ である。

すると，$M>m$ なので，⑥から $p>0$ を満たしている。

(ii)　$p<0$ のとき

(i)と同様に考えると，$\alpha<0$ であり，⑥から $p<0$ を満たしている。

(i)(ii)より，いずれの場合についても，求める条件は①②⑥⑦であり，

$$p=\frac{2(M-m)}{\alpha^3},\quad q=-\frac{3(M-m)}{\alpha^2},\quad r=0,\quad s=M$$

［解　説］

必要条件を求め，十分性を確認するという方法で記しました。内容は，3 次関数の値の増減について，基本の確認です。