1

解答解説のページへ

　実数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ に対して，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(c,\ d)$，$\mathrm{C}(e,\ 0)$ をとる。ただし点 A と点 B はどちらも原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とは異なる点とする。このとき，実数 $s,\ t$ で，$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすものが存在するための，$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ についての必要十分条件を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$ が成り立つ。

(イ)　$t>0$ に対して，等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$ を満たす実数 x が存在する。

このとき，$f(t)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

4

解答解説のページへ

半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径をもつ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1, T_2, $\cdots$, T_n があり，次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　T_i は S_1, S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

(イ)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　T_1, T_2, $\cdots$, T_n の共通の半径 r_n を求めよ。

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1, T_2, $\cdots$, T_n の体積の和を W_n とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2，3，4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1) p_n+q_n を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3) $r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。

1

問題のページへ

$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$s(a,\ b)+t(c,\ d)=(e,\ 0)$ となり，

$$as+ct=e\cdots\cdots\cdots①,\quad bs+dt=0\cdots\cdots\cdots②$$

①$\times d-$②$\times c$ より，$(ad-bc)s=de\cdots\cdots\cdots$③

②$\times a-$①$\times b$ より，$(ad-bc)t=-be\cdots\cdots\cdots$④

(i)　$ad-bc\neq 0$ のとき　③④より，$s=\dfrac{de}{ad-bc}$，$t=-\dfrac{be}{ad-bc}$

(ii)　$ad-bc=0$ のとき　③④より，$be=de=0\cdots\cdots\cdots$⑤

(ii-i)　$e=0$ のとき　任意の s, t で③④は成り立つ。

(ii-ii)　$e\neq 0$ のとき　⑤より，$b=d=0$ となり，$ad-bc=0$ は成り立つ。

また，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$，$(c,\ d)\neq(0,\ 0)$ から，$a\neq 0$，$c\neq 0$ であり，このとき①②が成り立つ s, t は存在する。

以上より，①②を満たす実数 $s,\ t$ が存在する条件は，$ad-bc\neq 0$　または（$e=0$ かつ $ad-bc=0$）または（$e\neq 0$ かつ $b=d=0$）である。

［解 説］

行列を用いて，いったんまとめてもよいですが，ここでは普通に連立方程式を解きました。なお，結論は流れに沿った形で止めています。

2

問題のページへ

まず，$g(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-1-x$ とおくと，条件より，$g(x)\geqq 0$ かつ $g(x)=0$ となる x が存在することになり，

$$g'(x)=t\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}-1,\quad g''(x)=t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

すると，$t>0$ から $g''(x)>0$ となり，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}g'(x)=\infty$$

よって，$g'(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在し，これを $x=\alpha$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，$g(\alpha)=0$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

さて，$g'(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}-1=0$ より，

$$e^\alpha-e^{-\alpha}=\frac{2}{t},\quad e^{2\alpha}-\frac{2}{t}e^\alpha-1=0,\quad e^\alpha=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

すると，$g(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}+f(t)-1-\alpha=0$ から，

$$\frac{t}{2}\Big(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\Big)+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=0$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{-1+\sqrt{1+t^2}}{t}=\dfrac{2\sqrt{1+t^2}}{t}$ より，

$$f(t)=-\frac{t}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+t^2}}{t}+1+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=1-\sqrt{1+t^2}+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

［解　説］

一見，難問風の問題設定ですが，誘導はなくてもスムーズに流れていきます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

まず，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフに対して，図 1 より，

$$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{40000}}$$
$$>\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{200}$$
$$=\Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^{40000}+\frac{1}{200}$$
$$=2(200-1)+\frac{1}{200}=398+\frac{1}{200}$$

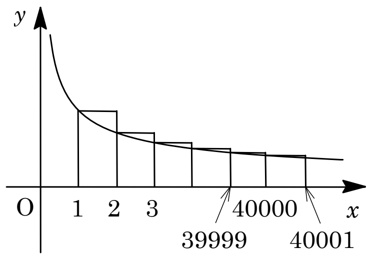


図1

また，同様に，図 2 より，

$$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\sum_{n=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$=1+398=399$$

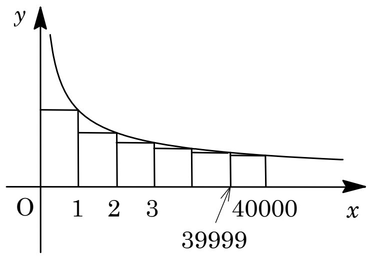


図2

以上より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は 398 である。

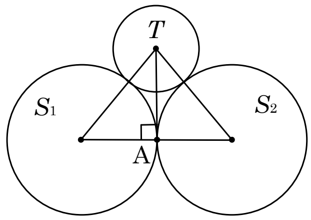
［解 説］

数列と定積分の融合問題です。$\sqrt{40000}=200$ に着目して，最初または最後の短冊は別扱いという形で，きれいに解けます。ただ，かなりアバウトな書き方になっていますが……。

4

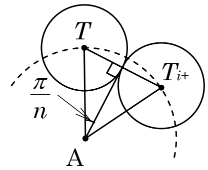
問題のページへ

(1)　半径 1 の球S_1，S_2の接点を A とし，A と半径r_nの球T_iの中心との距離をx_nとすると，



$$x_n=\sqrt{(1+r_n)^2-1^2}=\sqrt{r_n{}^2+2r_n}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$r_n=x_n\sin\dfrac{\pi}{n}$より，$x_n=\dfrac{r_n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\ \cdots\cdots\cdots②$



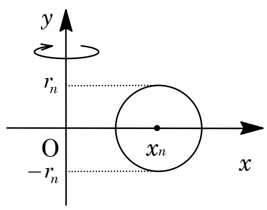
①②より，$\dfrac{r_n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}=\sqrt{r_n{}^2+2r_n}$ となり，

$$r_n{}^2=(r_n{}^2+2r_n)\sin^2\frac{\pi}{n},\ \left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)r_n=2\sin^2\frac{\pi}{n}$$

よって，$r_n=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{1-\sin^2\dfrac{\pi}{n}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{\cos^2\dfrac{\pi}{n}}=2\tan^2\dfrac{\pi}{n}$

(2)　まず，T_1，T_2，…，T_nの体積の和W_nは，$W_n=\dfrac{4}{3}n\pi r_n{}^3$

次に，S_1とS_2の中心を結ぶ直線のまわりにT_1を回転してできる回転体を，中心$(x_n,\ 0)$，半径r_nの円を y 軸のまわりに 1 回転してつくる考え，



$$(x-x_n)^2+y^2=r_n{}^2,\ x=x_n\pm\sqrt{r_n{}^2-y^2}$$

すると，$y=k$における回転体の断面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi\left\{(x_n+\sqrt{r_n{}^2-k^2})^2-(x_n-\sqrt{r_n{}^2-k^2})^2\right\}=4\pi x_n\sqrt{r_n{}^2-k^2}$$

その体積V_nは，対称性から，

$$V_n=2\int_0^{r_n}S(k)dk=8\pi x_n\int_0^{r_n}\sqrt{r_n{}^2-k^2}\,dk=8\pi x_n\cdot\frac{1}{4}\pi r_n{}^2=2\pi^2x_nr_n{}^2$$

②より，$\dfrac{W_n}{V_n}=\dfrac{\dfrac{4}{3}n\pi r_n{}^3}{2\pi^2x_nr_n{}^2}=\dfrac{2n}{3\pi}\cdot\dfrac{r_n}{x_n}=\dfrac{2n}{3\pi}\sin\dfrac{\pi}{n}$となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\frac{2}{3}$$

［解 説］

空間図形とその体積についての総合問題です。計算量も妥当なものです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$T_n = X_1X_2\cdots X_n$ とするとき，T_n が 5 で割り切れないのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のいずれも 5 以外の場合である。

条件より，T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とするとき，$p_n + q_n$ は T_n が 5 で割り切れない確率になるので,

$$p_n + q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となる場合は, 次の通りである。

(i)　T_n を 5 で割った余りが 1 のとき

X_{n+1} が 1 または 6 であるときで, その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

(ii)　T_n を 5 で割った余りが, 2, 3, 4 のいずれかであるとき

X_{n+1} がそれぞれ 3, 2, 4 ときで, その確率はいずれも $\dfrac{1}{6}$ である。

(iii)　T_n を 5 で割った余りが 0 のとき

どんな X_{n+1} に対しても T_{n+1} を 5 で割った余りは 0 となり，成立しない。

(i)～(iii)に，①を適用して,

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n\right\} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　$r_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと，$p_1 = \dfrac{1}{3}$ より $r_1 = \dfrac{6}{5}p_1 = \dfrac{2}{5}$ となり，②から,

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1} p_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n + \frac{1}{5},\quad r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}$$

これより，$r_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}\left(r_n - \dfrac{1}{4}\right)$ となり,

$$r_n - \frac{1}{4} = \left(r_1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

よって，$r_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$，$p_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n r_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

［解 説］

確率と漸化式についての標準的な問題です。(3)で誘導が付いていたのは意外でしたが。