$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

2

解答解説のページへ

直線$l : y = kx + m\ (k > 0)$が円$C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$と放物線$C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2$の両方に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　kとmを求めよ。

(2)　直線lと放物線C_2およびy軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある。2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP＝AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△AQR の面積を $\theta=\angle\mathrm{PAB}$ を用いて表せ。

(2)　点 P を動かして△AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ。

1

問題のページへ

まず，$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ より，$x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$ とおくことができ，さらに，$P=x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ とすると，

$$\begin{aligned}P&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta}\\&=\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)+\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)+2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta}\\&=\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta|\sin\alpha||\sin\beta|\\&=\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\\&=(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)^2=\sin^2(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

すると，$0\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$ より $0\leqq P\leqq 1$ となり，

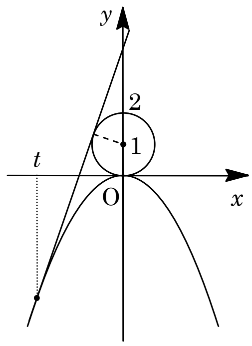
$$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$$

［解 説］

初めは，$P=\left(x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}\right)^2+(x^2-y^2)^2$ と変形したものの，右側の不等式がうまく示せません。後ろ髪を引かれつつも，この式変形を放棄し，式の形をみて，$x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$ とおきました。すると，$P=\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2$ という変形に気づきます！　運・不運が濃厚に反映される問題です。

2

問題のページへ



(1) 放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，$y' = -x$ となるので，点 $\left(t,\ -\dfrac{1}{2}t^2\right)$ における接線 l の方程式は，

$$y + \frac{1}{2}t^2 = -t(x - t),\ \ y = -tx + \frac{1}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$l : 2tx + 2y - t^2 = 0$ と変形し，さらに l は円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ にも接するので，

$$\frac{|2-t^2|}{\sqrt{4t^2+4}} = 1,\ \ (2-t^2)^2 = 4t^2 + 4,\ \ t^2(t^2 - 8) = 0$$

ここで，$l : y = kx + m\ (k > 0)$ から，$k = -t > 0$ となるので，$t = -2\sqrt{2}$

$(*)$に代入すると，$l : y = 2\sqrt{2}x + 4$ となり，$k = 2\sqrt{2}$，$m = 4$

(2) 直線 l と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S = \int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left(2\sqrt{2}x + 4 + \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 dx$$

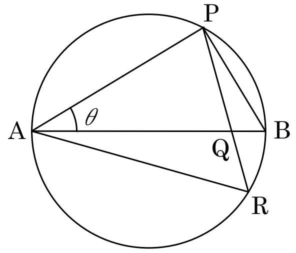
$$= \frac{1}{6}\left[\left(x + 2\sqrt{2}\right)^3\right]_{-2\sqrt{2}}^{0} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

［解 説］

円と接線，および面積計算についての基本的な問題です。なお，(1)の解法についてはいろいろ考えられますが，設問(2)を参照すると，まず放物線の接点を設定するのがよいということがわかります。

3

問題のページへ



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, AB が直径なので $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ より,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\theta=2\cos\theta$$

すると，条件より，$\mathrm{AQ}=2\cos\theta$，$\mathrm{BQ}=2-2\cos\theta$

また，$\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ から,

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AQ}\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\Big)=4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RQ}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}$ となり,

$$4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathrm{RQ}=2\cos\theta(2-2\cos\theta),\ \ \mathrm{RQ}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

そこで，△AQR の面積を S とすると，$\angle\mathrm{AQR}=\pi-\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$ より,

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\Big)=2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

(2)　(1)より, S が最大になるのは，$\sin2\theta=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

このとき，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=4\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}:2\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}:1$ となり，点 R は線分 PQ を $(\sqrt{2}+1):1$ に外分することより,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\sqrt{2}+1)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(\sqrt{2}+1)-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

また，$\mathrm{AQ}=2\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

［解 説］

よく見かける構図の三角関数の図形への応用問題です。上記以外にも，いろいろな解法が考えられます。たとえば，点 A を原点，点 B を x 軸上の点として xy 平面で，ということも脳裏に浮かびましたが，計算量を考えて……。