1　　解答解説のページへ

自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ $(x\geqq 0)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ。

(2) 数列 $\{I_n\}$ を，$I_n=\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$ で定める。$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

実数 $x,\ y$ が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。

(2)　p, q, $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。そのとき，$p=q=0$ であることを示せ。

4

解答解説のページへ

座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に, Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

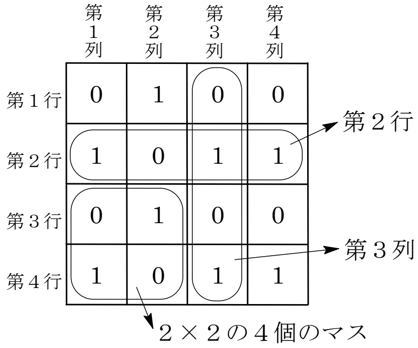
(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。正方形の形に並んだ $n\times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる。マスは上から第 1 行, 第 2 行, …, 左から第 1 列, 第 2 列…と数える。数字の入れ方についての次の条件 p を考える。

条件 p : 1 から $n-1$ までのどの整数 i, j についても, 第 i 行, 第 $i+1$ 行と第 j 列, 第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る。



(n＝4 の場合の入れ方の例)

(1)　条件 p を満たすとき, 第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ。

(2)　条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$のとき，$I_n=\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$に対し，$t=\dfrac{x}{n}$とおくと，

$$I_n=\int_0^1\frac{t}{1+nt}\log(1+t)\cdot n\,dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\,dt$$
$$=\int_0^1\log(1+t)\,dt-\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$0\leqq t\leqq 1$のとき，$1+nt>0$，$\log(1+t)\geqq 0$より，

$$\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt>0$$

よって，$I_n\leqq\displaystyle\int_0^1\log(1+t)\,dt$，すなわち，$\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx\leqq\int_0^1\log(1+x)\,dx$

(2)　まず，$\displaystyle\int_0^1\log(1+x)\,dx=\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1-\int_0^1 dx=2\log 2-1$

すると，(1)より，$I_n\leqq 2\log 2-1\cdots\cdots\cdots②$

また，$0\leqq t\leqq 1$のとき$\log(1+t)\leqq\log 2$から，①より，

$$I_n\geqq 2\log 2-1-\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log 2\,dt=2\log 2-1-\log 2\left[\frac{\log(1+nt)}{n}\right]_0^1$$
$$=2\log 2-1-\frac{\log(1+n)}{n}\log 2\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$2\log 2-1-\dfrac{\log(1+n)}{n}\log 2\leqq I_n\leqq 2\log 2-1$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{1+n}\left(\frac{1}{n}+1\right)=0$より，

$$\lim_{n\to\infty}I_n=2\log 2-1$$

［解　説］

不等式を立て，はさみうちの原理を用いて極限を求めるという頻出問題です。ポイントは，①の 2 つめの定積分の値の評価を，$0\leqq\log(1+t)\leqq\log 2$によって行うということですが，やや誘導がつかみにくいのは確かです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

まず，$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ より，$x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$ とおくことができ，さらに，$P=x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ とすると，

$$\begin{aligned}P&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta}\\&=\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)+\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)+2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta}\\&=\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta|\sin\alpha||\sin\beta|\\&=\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\\&=(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)^2=\sin^2(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

すると，$0\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$ より $0\leqq P\leqq 1$ となり，

$$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$$

［解　説］

初めは，$P=\left(x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}\right)^2+(x^2-y^2)^2$ と変形したものの，右側の不等式がうまく示せません。後ろ髪を引かれつつも，この式変形を放棄し，式の形をみて，$x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$ とおきました。すると，$P=\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2$ という変形に気づきます！　運・不運が濃厚に反映される問題です。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　まず，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，a, b を互いに素な自然数として，

$$\sqrt{2}=\frac{b}{a},\ \ b^2=2a^2$$

b^2 は 2 の倍数，すると b は 2 の倍数となり，k を自然数として $b=2k$ とおくと，

$$4k^2=2a^2,\ \ a^2=2k^2$$

a^2 は 2 の倍数，すると a は 2 の倍数となり，a, b が互いに素であることに反する。よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない，すなわち無理数である。

次に，$\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定すると，c, d を互いに素な自然数として，

$$\sqrt[3]{3}=\frac{d}{c},\ \ d^3=3c^3$$

d^3 は 3 の倍数，すると d は 3 の倍数となり，l を自然数として $d=3l$ とおくと，

$$27l^3=3c^3,\ \ c^3=9l^3$$

c^3 は 3 の倍数，すると c は 3 の倍数となり，c, d が互いに素であることに反する。よって，$\sqrt[3]{3}$ は有理数ではない，すなわち無理数である。

(2)　p, q, r が有理数のとき，$\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ とおくと，$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$ となり，

$$3q^3=r^3-3\sqrt{2}pr^2+6p^2r-2\sqrt{2}p^3,\ \ p(2p^2+3r^2)\sqrt{2}=r^3+6p^2r-3q^3$$

ここで，$p(2p^2+3r^2)\neq 0$ とすると，$\sqrt{2}=\dfrac{r^3+6p^2r-3q^3}{p(2p^2+3r^2)}$ となるが，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。よって，$p(2p^2+3r^2)=0$ である。

(i)　$p=0$ のとき

$\sqrt[3]{3}q=r$ となり，ここで $q\neq 0$ とすると $\sqrt[3]{3}=\dfrac{r}{q}$ となるが，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。よって，$q=0$ である。

(ii)　$p\neq 0$ のとき

$2p^2+3r^2=0$ となるが，左辺は正より成立しない。

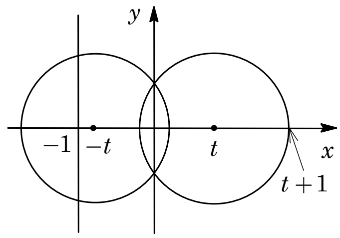
(i)(ii)より，$p=q=0$ である。

［解　説］

教科書や参考書に，背理法の例題として載っている有名問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1) 時刻 t において，球 A は中心の座標が $(t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したもの，また球 B は中心の座標が $(-t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x+t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したものである。

さて，球 $A,\ B$ の交線は yz 平面上にあるので，$x\geqq -1$ における $A\cup B$ の体積 $V(t)$ は，

$$V(t)=\pi\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\pi\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$ とすると，

$$I_1=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x+t)^3\,\Big]_{-1}^{0}=1-\frac{1}{3}\{t^3-(-1+t)^3\}=-t^2+t+\frac{2}{3}$$

$$I_2=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x-t)^3\,\Big]_{0}^{t+1}=t+1-\frac{1}{3}(1+t^3)=-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$$

よって，$V(t)=\pi(I_1+I_2)=\pi\Big(-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\Big)$

(2) $f(t)=-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}$ とおくと，$V(t)=\pi f(t)$ となり，

$$f'(t)=-t^2-2t+2$$

すると，$0\leqq t\leqq 1$ における $f'(t)=0$ の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$			$\searrow$

ここで，$f(t)$ を $-f'(t)$ で割ると，$f(t)=-f'(t)\Big(-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{3}\Big)+2t+\dfrac{2}{3}$ から，

$$f(-1+\sqrt{3})=2(-1+\sqrt{3})+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}$$

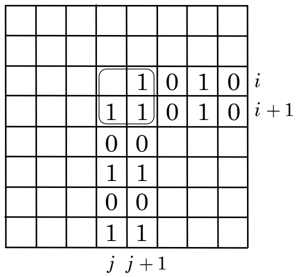
よって，$V(t)$ の最大値は，$\pi f(-1+\sqrt{3})=\Big(-\dfrac{4}{3}+2\sqrt{3}\Big)\pi$ である。

［解　説］

阪大・理系の定番である立体の体積を求める問題です。ただ，例年に比べ穏やかな内容になっています。

5

問題のページへ



(1)　まず，第 i 行，第 j 列の数字を $N(i,\ j)$ と表す。

ここで，条件 p を満たすとき，第 n 行にも第 n 列にも同じ数字が連続して現れると仮定する。

すると，右図のように，ある i, j について，

$$N(i,\ n)=N(i+1,\ n),\ N(n,\ j)=N(n,\ j+1)$$

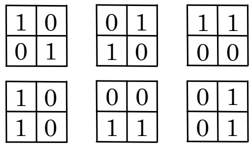
このとき，任意の $k(1\leqq k\leqq n)$ に対して，

$$N(i,\ k)=N(i+1,\ k),\ N(k,\ j)=N(k,\ j+1)$$

これより，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 のマスには，同じ数字が 3 個入ることになり，条件 p に反する。

よって，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れる。

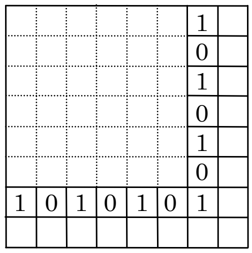
(2)　第 n 行と第 n 列について，ともに 0 と 1 が交互に現れる入れ方を b_n 通り，また一方だけ 0 と 1 が交互に現れる入れ方を c_n 通りとする。すると，条件 p を満たす数字の入れ方の総数 a_n は，(1)の結果から，$a_n=b_n+c_n$ となる。



まず，$n=2$ のとき，条件 p を満たす入れ方は右図のようになり，$b_2=2$，$c_2=4$ である。

さて，$n\times n$ のマスから $(n+1)\times(n+1)$ のマスを作ると考え，$N(n,\ n)$ と $N(n+1,\ n+1)$ に注目する。

(i)　$n\times n$ のマスで，第 n 行と第 n 列ともに 0 と 1 が交互に現れるとき



(i-i)　$N(n+1,\ n+1)=N(n,\ n)$ のとき

条件 p を満たすのは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，

$$N(n+1,\ k)\neq N(n,\ k)\ かつ\ N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$$

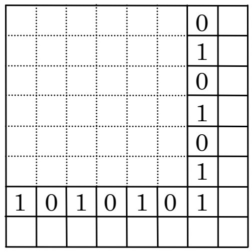
(i-ii)　$N(n+1,\ n+1)\neq N(n,\ n)$ のとき

条件 p を満たすのは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，次のいずれかである。

・$N(n+1,\ k)\neq N(n,\ k)$ かつ $N(k,\ n+1)=N(k,\ n)$

・$N(n+1,\ k)=N(n,\ k)$ かつ $N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$

(ii)　$n\times n$ のマスで，第 n 行と第 n 列いずれか一方に 0 と 1 が交互に現れるとき



(ii-i)　$N(n+1,\ n+1)=N(n,\ n)$ のとき

条件 p を満たすのは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，

$$N(n+1,\ k)\neq N(n,\ k)\ かつ\ N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$$

(ii-ii)　$N(n+1,\ n+1)\neq N(n,\ n)$ のとき

条件 p を満たすのは，第 n 行だけ 0 と 1 が交互に現れるときは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，

$$N(n+1,\ k)=N(n,\ k)\text{ かつ }N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$$

また, 第 n 列だけ 0 と 1 が交互に現れるときも同様である。

(i)(ii)より，b_{n+1}，c_{n+1} を b_n，c_n を用いて表すと，$b_2=2$，$c_2=4$ のもとで,

$$b_{n+1}=b_n\cdots\cdots\cdots①\quad c_{n+1}=2b_n+2c_n\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$b_{n+1}=b_n=2$ となり，②に代入すると，$c_{n+1}=4+2c_n$ となる。

$$c_{n+1}+4=2(c_n+4)\text{，}c_n+4=(c_2+4)2^{n-2}=8\cdot 2^{n-2}=2^{n+1}$$

以上より，$a_n=2+(2^{n+1}-4)=2^{n+1}-2$

［解 説］

場合の数についてのかなり難しめの問題です。$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ と実験をしながら考えていきます。さらに, 考えたことを表現するのが一苦労です。そのため, 上記の解答例をまとめるのに, たいへん時間を費やしてしまいました。なお, ①②については, (i-i)の場合だけが, 第 $n+1$ 行と第 $n+1$ 列について, ともに 0 と 1 が交互に現れることに着目し, 立式しています。