**1**　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) $a$ を正の実数とし，$k$ を 1 以上の実数とする。$x$ についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は，不等式 $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 $s$ をもつことを示せ。

(2) $a$ を 3 以上の整数とする。$n^2+a$ が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 $n$ を $a$ を用いて表せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

曲線 $C: y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ を考える。

(1)　$C$ と直線 $L: y=-x+t$ が異なる 4 点で交わるような $t$ の値の範囲を求めよ。

(2)　$C$ と $L$ が異なる 4 点で交わるとし，その交点を $x$ 座標が小さいものから順に，$\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_4$ とするとき，$\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\right|}=4$ となるような $t$ の値を求めよ。

(3)　$t$ が(2)の値をとるとき，$C$ と線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

1 以上 6 以下の 2 つの整数 $a$, $b$ に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を $a$，2 回目に出る目を $b$ とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　実数 $a,\ k$ が $a>0$，$k\geqq 1$ のとき，2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ ……①に対して，$f(x)=x^2-kax+a-k$ とおくと，

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+k+a-k=\frac{1}{a^2}+a>0$$

$$f(1)=1-ka+a-k=(a+1)(1-k)\leqq 0$$

これより，①は $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たす実数解 $s$ をもつ。

(2)　整数 $a,\ n,\ k$ は，$a\geqq 3$，$n\geqq 2$，$k\geqq 1$ を満たすとする。

ここで，$n^2+a$ は $an+1$ で割り切れることから，$n^2+a=k(an+1)$ と表せ，

$$n^2-kan+a-k=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，②は $f(n)=0$ であり，さらに(1)から $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ なので，①は異なる実数解 $s,\ n\ (s<n)$ をもつことになる。

さて，①について，解と係数の関係から $s+n=ka$ となり，$s=ka-n$ ………③

$a,\ n,\ k$ は整数なので，③から $s$ も整数となる。さらに，$a\geqq 3$ から $-\dfrac{1}{3}\leqq -\dfrac{1}{a}<0$ となり，$-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ から $s=0,\ 1$ である。

(i)　$s=0$ のとき　$f(0)=a-k=0$ から $k=a$ となり，③から $n=a^2$

そして，$a^2\geqq 9$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(ii)　$s=1$ のとき　$f(1)=(a+1)(1-k)=0$ から $k=1$ となり，③から $n=a-1$

そして，$a-1\geqq 2$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(i)(ii)より，$n=a^2,\ a-1$ である。

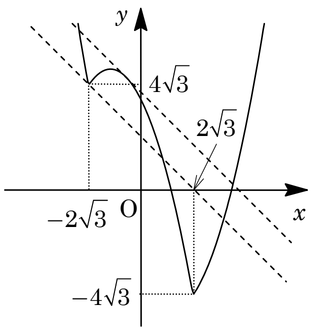
［解　説］

一見，無関係に思える 2 つの小問です。しかし，(2)を解いていくと，この整数問題への誘導として，(1)の 2 次方程式の解の配置についての設問がある，というのに気づきます。

**2**

問題のページへ

(1)　曲線 $C : y = \left|\dfrac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$ に対して，




(i)　$\dfrac{1}{2}x^2 - 6 \geqq 0$ $(x \leqq -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3} \leqq x)$ のとき

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 8 \cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}x^2 - 6 < 0$ $(-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3})$ のとき

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 8 \cdots\cdots\cdots②$$

さて，直線 $L : y = -x + t$ ……③が点 $(-2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$ を通るとき，$t = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ となる。

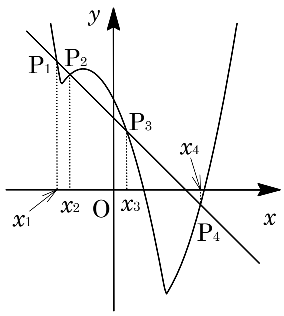
また，$L$ が放物線②と $x = s$ で接するとき，②から $y' = -x - 2$ なので，

$$-s - 2 = -1,\ s = -1$$

すると，接点 $\left(-1,\ \dfrac{15}{2}\right)$ となり，このとき $t = -1 + \dfrac{15}{2} = \dfrac{13}{2}$ である。

以上より，$C$ と $L$ が異なる 4 点で交わる $t$ の範囲は，$2\sqrt{3} < t < \dfrac{13}{2}$ である。

(2)　$C$ と $L$ が異なる 4 点 $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_4$ で交わるとき，その $x$ 座標をそれぞれ $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$ とおく。




まず，①③を連立して，$\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = -x + t$ となり，

$$x^2 - 2x - 2t - 12 = 0$$

この解が $x = x_1$，$x_4$ より，

$$x_1 + x_4 = 2,\ x_1x_4 = -2t - 12 \cdots\cdots\cdots④$$

次に，②③を連立して，$-\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = -x + t$ となり，

$$x^2 + 2x + 2t - 12 = 0$$

この解が $x = x_2$，$x_3$ より，$x_2 + x_3 = -2$，$x_2x_3 = 2t - 12 \cdots\cdots\cdots⑤$

すると，$L$ の傾きが $-1$ から，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\right| = \sqrt{2}(x_2 - x_1),\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}\right| = \sqrt{2}(x_4 - x_3),\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\right| = \sqrt{2}(x_3 - x_2)$$

ここで，条件より，$\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\right|} = 4$ なので，$\dfrac{(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3)}{x_3 - x_2} = 4$

$$x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2),\ (x_4 - x_1)^2 = 25(x_3 - x_2)^2$$

$$(x_1 + x_4)^2 - 4x_1x_4 = 25\{(x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3\}$$

④⑤を代入して，$4 - 4(-2t - 12) = 25\{4 - 4(2t - 12)\}$ となり，

$$1 + 2t + 12 = 25(1 - 2t + 12),\ 52t - 312 = 0$$

よって，求める $t$ の値は，$t = 6$ である。

(3)　$t=6$ のとき，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=0$ より，$(x_2,\ x_3)=(-2,\ 0)$ となる。

このとき，$C$ と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積 $S$ は,

$$S=\int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}x^2-2x+6-(-x+6)\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(0+2)^3=\frac{2}{3}$$

［解 説］

絶対値つき関数のグラフを題材とした総合問題です。解答例では，$C$ と $L$ をそのまま扱いましたが，曲線 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-x$ と直線 $y=t$ という組で処理しても構いません。計算量が少しだけ減少します。

**3**

問題のページへ

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{5}{6}$ から，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\ f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{5}{6}-x\right),\ f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_5(x)$ を求めると，

$$f_5(x)=f_4(-x)=f_3\left(\frac{5}{6}+x\right)=f_2\left(-\frac{5}{6}-x\right)=f_1\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+x\right)$$
$$=f_1\left(\frac{5}{3}+x\right)=\sin\left(\frac{5}{3}\pi+\pi x\right)$$

よって，$f_5(0)=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=k$ とおくと，$1\leqq a\leqq 6$，$1\leqq b\leqq 6$ より，$\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq 2$ となり，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\ f_{2n}(x)=f_{2n-1}(k-x),\ f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_6(x)$ を求めると，

$$f_6(x)=f_5(k-x)=f_4(-k+x)=f_3(k+k-x)=f_3(2k-x)=f_2(-2k+x)$$
$$=f_1(k+2k-x)=f_1(3k-x)=\sin(3k\pi-\pi x)$$

よって，$f_6(0)=\sin(3k\pi)$ となり，$f_6(0)=0$ より $\sin(3k\pi)=0\cdots\cdots\cdots(*)$

ここで，$\pi\leqq 3k\pi\leqq 6\pi$ なので，$(*)$から，$3k\pi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi$

$$3k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

すなわち，$(*)$を満たすのは，$3k=\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が 6 以下の自然数の場合である。

そこで，$\dfrac{3}{a}$，$\dfrac{3}{b}$ のとり得る値が，ともに $3,\ \dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{2}$ であることに注意し，この条件を満たす$\left(\dfrac{3}{a},\ \dfrac{3}{b}\right)$の組を列挙すると，

$$(3,\ 3),\ (3,\ 1),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (1,\ 3),\ (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

したがって，$f_6(0)=0$ となる $(a,\ b)$ の組は 8 通りとなり，その確率は，

$$\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$$

## ［解　説］

関数の定義を問う設問に確率が融合しています。(2)で，条件を満たす $(a,\ b)$ の組を見つけるには，記述は省きましたが，センター風に $6\times 6$ の表を作りました。