1

解答解説のページへ

1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　$a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a, 2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　c を正の定数とする。正の実数 $x,\ y$ が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2)　正の実数 $x,\ y,\ z$ が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする。

(1)　a, b, r の値をそれぞれ求めよ。

(2)　連立不等式　$a \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2$，$x^2+y^2 \geqq r^2$ の表す領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

正の整数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

(1)　$\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。

(2)　$S_n=2+\dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ。

(3)　整数 a と $0\leqq b<1$ を満たす実数 b を用いて，$A_{20}S_{20}=a+b$ と表すとき，b の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び, 円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とおき, $\vec{a}$ の大きさを x とする。

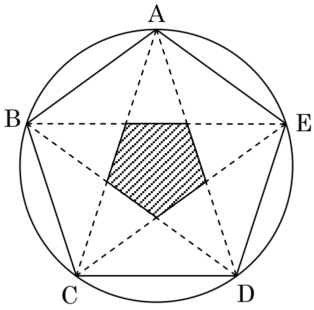
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき, $x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

(4) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して, R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし, R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$$ を求めよ。



斜線部分が R_2

1

問題のページへ

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{5}{6}$ から，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\ f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{5}{6}-x\right),\ f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_5(x)$ を求めると，

$$f_5(x)=f_4(-x)=f_3\left(\frac{5}{6}+x\right)=f_2\left(-\frac{5}{6}-x\right)=f_1\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+x\right)$$
$$=f_1\left(\frac{5}{3}+x\right)=\sin\left(\frac{5}{3}\pi+\pi x\right)$$

よって，$f_5(0)=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$a=1$，$b=6$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{6}$ から，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\ f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{7}{6}-x\right),\ f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{7}{6}-x\right)=f_{2n-2}\left(-\dfrac{7}{6}+x\right)=f_{2n-2}\left(x-\dfrac{7}{6}\right)$ となり，

$$f_{2n}(x)=f_2\left(x-\frac{7}{6}(n-1)\right)=f_1\left(\frac{7}{6}-x+\frac{7}{6}(n-1)\right)=f_1\left(-x+\frac{7}{6}n\right)$$

よって，$f_{2n}(0)=f_1\left(\dfrac{7}{6}n\right)=\sin\left(\dfrac{7}{6}n\pi\right)$

ここで，$s_k=(-1)^k f_{2k}(0)=(-1)^k\sin\left(\dfrac{7}{6}k\pi\right)$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{12}s_k=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+0=0$$

すると，$100=12\times8+4=96+4$ から，

$$\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)=\sum_{k=1}^{96}s_k+s_{97}+s_{98}+s_{99}+s_{100}$$
$$=0\times8+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$$

(3)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=k$ とおくと，$1\leqq a\leqq6$，$1\leqq b\leqq6$ より，$\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq2$ となり，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\ f_{2n}(x)=f_{2n-1}(k-x),\ f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_6(x)=f_5(k-x)=f_4(-k+x)=f_4(x-k)$ から，

$$f_6(x)=f_2(x-2k)=f_1(k+2k-x)=f_1(3k-x)=\sin(3k\pi-\pi x)$$

よって，$f_6(0)=\sin(3k\pi)$ となり，$f_6(0)=0$ より $\sin(3k\pi)=0$ ………(*)

ここで，$\pi\leqq3k\pi\leqq6\pi$ なので，(*)から，$3k\pi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi$

$$3k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

すなわち，(*)を満たすのは，$3k=\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が 6 以下の自然数の場合である。

そこで，$\dfrac{3}{a}$，$\dfrac{3}{b}$ のとり得る値が，ともに $3,\ \dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{2}$ であることに注意し，

この条件を満たす$\left(\dfrac{3}{a},\ \dfrac{3}{b}\right)$の組を列挙すると,

$$(3,\ 3),\ (3,\ 1),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (1,\ 3),\ (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

したがって, $f_6(0)=0$となる$(a,\ b)$の組は8通りとなり, その確率は,

$$\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$$

［解 説］

関数の定義を問う設問に確率が融合しています。(2)だけ理系単独ですが, $f_{2n}(0)$の式の形から周期 12 が見つかります。また(3)では, 条件を満たす$(a,\ b)$の組を見つけるには, 記述は省きましたが, センター風に6×6の表を作りました。

2

問題のページへ

(1)　c は正の定数，$x+y=c\ (x>0,\ y>0)$ のとき，$P=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ とおくと，

$$P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$c=x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ となり，

$\dfrac{1}{xy}\geqq\dfrac{4}{c^2}$　（等号は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき成立）

よって，$P\geqq 1+\dfrac{4(c+1)}{c^2}=\dfrac{(c+2)^2}{c^2}=\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ となり，P は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ をとる。

(2)　$x+y+z=1\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ のとき，$Q=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおく。

ここで，$x+y=1-z$ から $0<z<1$ となり，$1-\dfrac{4}{3z}=\dfrac{3z-4}{3z}<0$

すると，(1)の結果から，

$$Q=P\left(1-\frac{4}{3z}\right)\leqq\left(\frac{1-z+2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)=\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{3z-4}{3z}$$

なお，等号は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき成立する。

ここで，$f(z)=\left(\dfrac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}=\left(\dfrac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}$ とおくと，

$$f'(z)=2\cdot\frac{z-3}{z-1}\cdot\frac{2}{(z-1)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}$$

$$=\frac{4(z-3)}{3z(z-1)^2}\left(\frac{3z-4}{z-1}+\frac{z-3}{z}\right)=\frac{4(z-3)(4z^2-8z+3)}{3z^2(z-1)^3}$$

$$=\frac{4(z-3)(2z-1)(2z-3)}{3z^2(z-1)^3}$$

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		$\nearrow$	$-\frac{125}{3}$	$\searrow$	

これより，$f(z)$ の増減は右表のようになり，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

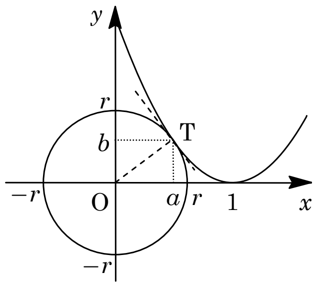
したがって，Q は $x=y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

［解　説］

条件付きの最大・最小問題です。(2)では，(1)の結果の利用するため，いったん z を固定して考えています。なお，$f'(z)$ を商の微分法を利用してまとめていくと，相当な計算量になります。

3

問題のページへ



(1)　円 $x^2+y^2=r^2$ と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ の接点を $\mathrm{T}(a,\ b)$ とおくと，

$$b=\sqrt{2}(a-1)^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 T における放物線の接線について，$y'=2\sqrt{2}(x-1)$ から，その方向ベクトルを $\vec{u}$ とおくと，$\vec{u}=\left(1,\ 2\sqrt{2}(a-1)\right)$ と表せる。

そして，$\vec{u}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(a,\ b)$ は垂直なので，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}}=0$ より，

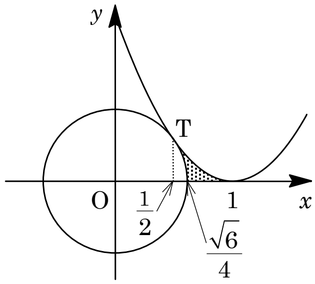
$$a+2\sqrt{2}(a-1)b=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+4(a-1)^3=0$ となり，

$$4a^3-12a^2+13a-4=0,\ (2a-1)(2a^2-5a+4)=0$$

$2a^2-5a+4=0$ は実数解をもたないので，$a=\dfrac{1}{2}$

$$b=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{4},\ r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$



(2)　(1)より，円 $x^2+y^2=\dfrac{3}{8}$，$\mathrm{T}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ となり，右図の網点部を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\sqrt{2}(x-1)^2\right\}^2dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\frac{3}{8}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}2(x-1)^4dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\frac{3}{8}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{2}{5}(x-1)^5\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\pi\left[\frac{3}{8}x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$=\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{1}{32}-\frac{3}{8}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{6}}{32}-\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{19}{120}-\frac{\sqrt{6}}{16}\right)\pi$$

［解　説］

回転体の体積を計算する基本問題です。最後の数値計算が少しややこしいです。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　まず，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$N=[\log_2 n]$，$A_n$ を n 以下のすべての奇数の積とするとき，$P_n=2^N A_n S_n$ とおくと，$P_1=2^0\cdot1\cdot1=1$ となり，$n=1$ のとき P_n は奇数である。

以下，$n\geqq2$ のときを考え，$N\geqq1$ における $P_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^N A_n}{k}$ の各項について，

(i)　k が奇数のとき　k は奇数の積 A_n のいずれかの項であることから，

$$\frac{2^N A_n}{k}=\frac{2^N(1\times3\times\cdots)}{k}=2^N\{1\times3\times\cdots\times(k-2)\times(k+2)\times\cdots\}$$ は偶数となる。

(ii)　k が偶数のとき　$N=[\log_2 n]$ から $2^N\leqq n<2^{N+1}$ であることから，

(ii-i)　$k=2^N$ のとき

$$\frac{2^N A_n}{k}=\frac{2^N(1\times3\times\cdots)}{2^N}=1\times3\times\cdots$$ は奇数となる。

(ii-ii)　$k\neq2^N$ のとき　$k=2^l\cdot M$ ($1\leqq l\leqq N-1$，M は n 以下の奇数) と表せ，

$$\frac{2^N A_n}{k}=\frac{2^N(1\times3\times\cdots)}{2^l\cdot M}=2^{N-l}\{1\times3\times\cdots\times(M-2)\times(M+2)\times\cdots\}$$ は偶数となる。

(i)(ii)より，$P_n=2^N A_n S_n$ は，奇数 1 項と偶数 $n-1$ 項の和となり奇数である。

(2) 正の整数 n，m に対し $S_n=2+\dfrac{m}{20}$ ……(＊)となるのは，$S_1<S_2<S_3=1+\dfrac{5}{6}<2$，$S_4=2+\dfrac{1}{12}>2$ から，$n\geqq4$ であり，

$$S_5=2+\frac{17}{60},\quad S_6=2+\frac{9}{20},\quad S_7=2+\frac{83}{140}$$

ここで，(1)から $P_n=2^N A_n S_n$ は奇数となり，$S_n=\dfrac{P_n}{2^N A_n}$ と表せる。

すると，$n\geqq8$ のとき $N\geqq3$ となるので，S_n の分母は約数 $2^3=8$ をもつ。ところが，$20=2^2\times5$ であるので，このとき(＊)は成立しない。

よって，(＊)を満たす $(n,\ m)$ は，$n=6$，$m=9$ だけである。

(3)　$A_{20}S_{20}=\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1\times3\times\cdots\times19}{k}=a+b$（$a$ は整数部分, b は小数部分）と表すとき，

(i)　k が奇数のとき

$$\frac{1\times3\times\cdots\times19}{k}=1\times3\times\cdots\times(k-2)\times(k+2)\times\cdots\times19$$ より，小数部分 $b=0$ となる。

(ii)　k が偶数のとき

(1)より，$\dfrac{2^N A_{20}}{k}=\dfrac{2^4(1\times3\times\cdots\times19)}{k}$ は整数となり，A_{20} を $2^4=16$ で割った余りを求めるために，mod16 で調べると，

$$A_{20}\equiv1\times3\times5\times7\times(-7)\times(-5)\times(-3)\times(-1)\times1\times3\equiv3\times3\times3\times3\times3\equiv3$$

これより，$k=2,\ 4,\ \cdots,\ 20$ のときについて，

(ii-i)　$k=2$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{2}=2^3 A_{20}\equiv 8\times 3\equiv 8$ より，$b=\dfrac{8}{16}$ となる。

(ii-ii)　$k=4$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{4}=2^2 A_{20}\equiv 4\times 3=12$ より，$b=\dfrac{12}{16}$ となる。

(ii-iii)　$k=6$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{6}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{3}\equiv 8\times 1=8$ より，$b=\dfrac{8}{16}$ となる。

(ii-iv)　$k=8$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{8}=2A_{20}\equiv 2\times 3=6$ より，$b=\dfrac{6}{16}$ となる。

(ii-v)　$k=10$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{10}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{5}\equiv 8\times 7\equiv 8$ より，$b=\dfrac{8}{16}$ となる。

(ii-vi)　$k=12$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{12}=2^2\cdot\dfrac{A_{20}}{3}\equiv 4\times 1=4$ より，$b=\dfrac{4}{16}$ となる。

(ii-vii)　$k=14$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{14}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{7}\equiv 8\times 5\equiv 8$ より，$b=\dfrac{8}{16}$ となる。

(ii-viii)　$k=16$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{16}=A_{20}\equiv 3$ より，$b=\dfrac{3}{16}$ となる。

(ii-ix)　$k=18$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{18}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{9}\equiv 8\times 11\equiv 8$ より，$b=\dfrac{8}{16}$ となる。

(ii-x)　$k=20$ のとき　$\dfrac{2^4 A_{20}}{20}=2^2\cdot\dfrac{A_{20}}{5}\equiv 4\times 7\equiv 12$ より，$b=\dfrac{12}{16}$ となる。

(i)(ii)より，小数部分 b の和については，

$$0\times 10+\frac{8}{16}+\frac{12}{16}+\frac{8}{16}+\frac{6}{16}+\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{8}{16}+\frac{3}{16}+\frac{8}{16}+\frac{12}{16}=\frac{77}{16}=4+\frac{13}{16}$$

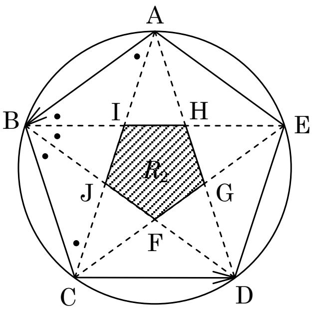
以上より，$A_{20}S_{20}$ の小数部分 b は $b=\dfrac{13}{16}$ である。

［解　説］

整数に関する難問です。(1)は，$n=7$，8 として具体例から考え，それを一般化しただけです。(2)では分母 20 に，(3)では 16 で割った余りに注目しています。なお，記述方法を検討しながら解答例をつくると，実質的に時間無制限でした。

5

問題のページへ



(1)　5 点 A, B, C, D, E は円周を 5 等分しているので,

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}$$

これより，右図のように，対角線の交点を F, G, H, I, J とおくと，△ABC と△AIB は相似となり，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AI}=\mathrm{AC}:\mathrm{AB}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}+\angle\mathrm{DBC}$ であるので，$\angle\mathrm{CIB}=\angle\mathrm{CBI}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=y$ とすると，

$$\mathrm{AI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CB}=y-x\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x:(y-x)=y:x$ となり，$x^2=y(y-x)\ \cdots\cdots\cdots③$

(2)　③より，$y^2-xy-x^2=0$ となり，$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\ \cdots\cdots\cdots④$

また, AD // BC，$\mathrm{AD}=y$，$\mathrm{BC}=x$ なので，④から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\vec{c}$ となり，

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

(3)　R_2 の 1 辺 IJ の長さは，$\mathrm{IJ}=\mathrm{AJ}-\mathrm{AI}=x-(y-x)=2x-y$ となるので，④から，

$$\mathrm{IJ}=2x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　相似な図形 R_{n+1} と R_n の面積比は，(3)より $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ であるので，

$$S_{n+1}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$$

すると，$\dfrac{1}{S_1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\dfrac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{1+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{9-3\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

［解　説］

正五角形を題材とした有名問題です。三角関数をベースに考えなくてもよいように，相似に着目させる誘導がついています。