1

解答解説のページへ

$b,\ c$ を実数, q を正の実数とする。放物線 $P : y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき, 放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

実数 x, y, z が，$x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2) $z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ とおく。数列$\{P_n\}$の一般項を求めよ。

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

1

問題のページへ

放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q より，

$$P: y=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+q\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$q>0$ から，P と x 軸の交点の x 座標は，$(*)$より $-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+q=0$ となり，

$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{q}\,,\ \ x=\frac{b}{2}+\sqrt{q}$$

これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，P と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta(-x^2+bx+c)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{q}\,)^3=\frac{4}{3}q\sqrt{q}$$

［解　説］

定積分と面積についての基本事項の確認問題です。

2　　　　問題のページへ

(1)　まず，$x+y+z=1$ ……①，$x+2y+3z=5$ ……②について，①－②から，

$$y+2z=4,\quad y=-2z+4 \cdots\cdots\cdots ③$$

③を①に代入すると，$x=1-(-2z+4)-z=z-3$ ………④

ここで，$P=x^3+y^3+z^3-3xyz$ とおくと，①③④から，

$$\begin{aligned}P&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\&=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=1-3(xy+yz+zx)\\&=1-3\{(z-3)(-2z+4)+(z-3-2z+4)z\}=1-3(-3z^2+11z-12)\\&=9z^2-33z+37=9\left(z-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{27}{4}\end{aligned}$$

よって，$z=\dfrac{11}{6}$ のとき，P は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる。

(2)　$Q=xyz$ とおくと，③④より，

$$Q=(-2z+4)(z-3)z=-2(z-2)(z-3)z=-2(z^3-5z^2+6z)$$

$Q'=-2(3z^2-10z+6)$ となり，$Q'=0$ の解は $z=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$ である。

これより，$z\geqq 0$ で Q の増減を調べると，右表のようになる。

z	0	…	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	…	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	…
Q'		$-$	0	$+$	0	$-$
Q	0	↘		↗		↘

ここで，$z=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のとき，$z-2=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}>0$，$z-3=\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}<0$ から，このとき $Q=-2(z-2)(z-3)z>0$ である。

よって，$z=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のとき，Q は最大となる。

［解　説］

条件付きの最大・最小問題です。変数をまとめて処理をするだけの問題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$a_1 = 2 > 0$ で，$a_{n+1} = 8{a_n}^2$ ……①より，帰納的に $a_n > 0$ であるので，①の両辺に底を 2 で対数をとると，

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2,\ \log_2 a_{n+1} = 3 + 2\log_2 a_n$$

ここで，$b_n = \log_2 a_n$ とおくと，$b_{n+1} = 3 + 2b_n$ ………②

(2)　②を変形すると，$b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$ となり，$b_1 = \log_2 a_1 = 1$ から，

$$b_n + 3 = (b_1 + 3)2^{n-1} = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

よって，$b_n = 2^{n+1} - 3$ ………③

(3)　条件より，$P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおくと，③から，

$$\log_2 P_n = \log_2 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \cdots + \log_2 a_n$$

$$= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1} - 3) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n$$

$$= 2^{n+2} - 3n - 4 \text{ ………④}$$

よって，$P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}$ である。

(4)　$P_n > 10^{100}$ とすると，$\log_2 P_n > 100\log_2 10$ ………⑤

ここで，$8 < 10 < 8\sqrt{2}$ より $2^3 < 10 < 2^{\frac{7}{2}}$ となるので，$3 < \log_2 10 < \dfrac{7}{2}$ から，

$$300 < 100\log_2 10 < 350$$

そこで，$\log_2 P_n$ は単調に増加する数列で，④から，

$$\log_2 P_6 = 2^8 - 18 - 4 = 234,\ \log_2 P_7 = 2^9 - 21 - 4 = 487$$

よって，不等式⑤すなわち $P_n > 10^{100}$ を満たす最小の n は $n = 7$ である。

［解　説］

漸化式と対数計算の融合問題です。なお，(4)で不等式を満たす n の値を求めるとき，2^{n+2} の値を指標にして，見当をつけています。