1　　解答解説のページへ

双曲線 $H: x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える。

(1)　点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いて表せ。

(2)　点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いて表せ。

(3)　点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ。

2

解答解説のページへ

複素数 z は $z^5=1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 とおく。複素数 w を $w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ と定める。

(1)　5 回とも表が出たとする。w の値を求めよ。

(2)　$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のとき，$|w|<1$ であることを示せ。

(3)　$|w|<1$ である確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

a, b を自然数とし，不等式(A) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ を考える。次の問いに答えよ。ただし，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1)　不等式(A)を満たし $b\geqq 2$ である自然数 a, b に対して，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ であることを示せ。

(2)　不等式(A)を満たす自然数 a, b の組のうち，$b\geqq 2$ であるものをすべて求めよ。

$\boxed{4}$　解答解説のページへ

$b,\ c$ を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が，$0\leqq f(1)\leqq 2$，$5\leqq f(3)\leqq 6$ を満たすとする。

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

5

解答解説のページへ

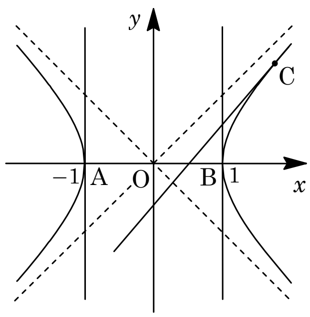
xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1)　t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2)　M の体積 V を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　双曲線 $H: x^2 - y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)\ (t \neq 0)$ に対し，点 A における接線の方程式は，

$$x = -1 \cdots\cdots\cdots ①$$

直線 BC の方程式は，$y = \dfrac{t}{s-1}(x-1) \cdots\cdots\cdots ②$

①②を連立すると $y = \dfrac{-2t}{s-1}$ となるので，①②の交点 P の座標は $\mathrm{P}\Big(-1,\ \dfrac{-2t}{s-1}\Big)$ である。

(2)　点 C における H の接線の方程式は $sx - ty = 1 \cdots\cdots ③$，また直線 AB の方程式は $y = 0 \cdots\cdots ④$ となり，③④を連立すると $x = \dfrac{1}{s}$ である。

これより，③④の交点 Q の座標は $\mathrm{Q}\Big(\dfrac{1}{s},\ 0\Big)$ である。

(3)　点 B における H の接線の方程式は $x = 1 \cdots\cdots ⑤$，また直線 AC の方程式は，

$$y = \frac{t}{s+1}(x+1) \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥を連立すると $y = \dfrac{2t}{s+1}$ となるので，⑤⑥の交点 R の座標は $\mathrm{R}\Big(1,\ \dfrac{2t}{s+1}\Big)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \Big(-1 - \dfrac{1}{s},\ \dfrac{-2t}{s-1}\Big) = \Big(-\dfrac{s+1}{s},\ \dfrac{-2t}{s-1}\Big) = \dfrac{-1}{s(s-1)}(s^2-1,\ 2st)$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \Big(1 - \frac{1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\Big) = \Big(\frac{s-1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\Big) = \frac{1}{s(s+1)}(s^2-1,\ 2st)$$

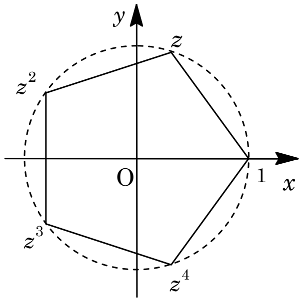
よって，$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = -\dfrac{s-1}{s+1}\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ となり，3 点 P, Q, R は一直線上にある。

［解 説］

双曲線の接線に関する基本的な問題です。計算も容易です。

2

問題のページへ



(1)　複素数 z は $z^5=1$ を満たし，しかも実部と虚部がともに正なので，

$$z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$$

また，複素数平面上で，点1，z，z^2，z^3，z^4 は，中心が原点で半径 1 の円に内接する正五角形の各頂点となり，

$$z^4=\overline{z},\ z^3=\overline{z^2}$$

さて，硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 とおく。

ここで，5 回とも表が出ると，$a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=1$ より，

$$w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4=1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{1-z^5}{1-z}=0$$

(2)　$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のとき，$w=z+z^4$ となり，

$$w=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi=2\cos\frac{2}{5}\pi$$

さて，$\frac{\pi}{3}<\frac{2}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$ から $\cos\frac{\pi}{2}<\cos\frac{2}{5}\pi<\cos\frac{\pi}{3}$ となり，$0<\cos\frac{2}{5}\pi<\frac{1}{2}$

よって，$|w|=2\cos\frac{2}{5}\pi<1$ である。

(3)　硬貨を 5 回投げたとき，表と裏の出方は 2^5 通りとなり，これが同様に確からしいとする。そこで，表の出た回数で場合分けをする。

(i)　表の出た回数が 0 のとき　この場合は 1 通りあり，$w=0$ で $|w|<1$ である。

(ii)　表の出た回数が 1 のとき　この場合は ${}_5C_1=5$ 通りある。
いずれの場合も $|w|=1$ となり，$|w|<1$ を満たさない。

(iii)　表の出た回数が 2 のとき　この場合は ${}_5C_2=10$ 通りある。

(iii-i)　表が連続して出たとき（第 1 回目を第 6 回目とみなしたときも含む）

この場合は 5 通りあり，$a_0=a_1=a_4=0$，$a_2=a_3=1$ のときは，

$$w=z^2+z^3=\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi=2\cos\frac{4}{5}\pi$$

さて，$\frac{2}{3}\pi<\frac{4}{5}\pi<\pi$ から $\cos\pi<\cos\frac{4}{5}\pi<\cos\frac{2}{3}\pi$ となり，$-1<\cos\frac{4}{5}\pi<-\frac{1}{2}$

よって，$|w|=-2\cos\frac{4}{5}\pi>1$ であり，$|w|<1$ を満たさない。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たさない。

(iii-ii)　表が連続せずに出たとき

この場合は $10-5=5$ 通りあり，$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のときは，(2)より $|w|<1$ を満たす。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たす。

(iv) 表の出た回数が 3 のとき　この場合は ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通りある。

(iv-i)　表が 3 回連続して出たとき（第 1 回目を第 6 回目とみなしたときも含む）

この場合は 5 通りあり，$a_2=a_3=0$，$a_0=a_1=a_4=1$ のときは,

$$w=1+z+z^4=1+2\cos\frac{2}{5}\pi$$

さて，$0<\cos\frac{2}{5}\pi<\frac{1}{2}$ から $1<1+2\cos\frac{2}{5}\pi<2$ となり，$|w|<1$ を満たさない。

そして, 同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たさない。

(iv-ii)　表が 3 回連続せずに出たとき

この場合は $10-5=5$ 通りあり，$a_1=a_4=0$，$a_0=a_2=a_3=1$ のときは,

$$w=1+z^2+z^3=1+2\cos\frac{4}{5}\pi$$

さて，$-1<\cos\frac{4}{5}\pi<-\frac{1}{2}$ から $-1<1+2\cos\frac{4}{5}\pi<0$ となり，$|w|<1$ を満たす。

そして, 同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たす。

(v)　表の出た回数が 4 のとき　この場合は ${}_5\mathrm{C}_4=5$ 通りある。

$a_0=0$，$a_1=a_2=a_3=a_4=1$ のときは,

$$w=z+z^2+z^3+z^4=(1+z+z^2+z^3+z^4)-1$$

(1)より，$w=-1$ となり $|w|=1$ である。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|=1$ となり，$|w|<1$ を満たさない。

(vi) 表の出た回数が 5 のとき　この場合は 1 通りあり，(1)より $|w|<1$ である。

(i)～(vi)より，$|w|<1$ である確率は，$\dfrac{1+5+5+1}{2^5}=\dfrac{3}{8}$ である。

［解 説］

複素数と確率の融合問題です。(1)と(2)の結果が(3)への誘導となっています。ただ, 対称性に着目して処理をしましたが, 解答例の書きにくい問題です。なお, (3)で(iv)の場合については, (v)で(ii)を利用した方法で(iii)を利用すると, 少し簡略化できます。(v)を記した後に気づきましたが。

3

問題のページへ

(1)　不等式(A) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ ……①が成り立つとき，

$$\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|=\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}+2\sqrt{7}\right|\leqq\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|+2\sqrt{7}<\frac{2}{b^4}+2\sqrt{7}\ \cdots\cdots②$$

そして，$b\geqq 2$，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ から，

$$\frac{2}{b^4}+2\sqrt{7}<\frac{2}{2^4}+2\times 2.646=0.125+5.292<6\ \cdots\cdots③$$

②③より，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ ………④

(2)　①×④より，$\left|\dfrac{a^2}{b^2}-7\right|<\dfrac{12}{b^4}$ となり，$b^2\left|a^2-7b^2\right|<12$ ………⑤

ここで，$a^2-7b^2=0$ とすると $a=\pm b\sqrt{7}$ となり，a は自然数，b は 2 以上の自然数，そして $\sqrt{7}$ は無理数ということに反する。

よって，$\left|a^2-7b^2\right|\geqq 1$ となり，さらに $b^2\geqq 4$ なので，⑤から $b^2=4,\ 9$ すなわち $b=2,\ 3$ である。

(i)　$b=2$ のとき

⑤より，$4\left|a^2-28\right|<12$ となり，$\left|a^2-28\right|=1,\ 2$ である。

(i-i)　$\left|a^2-28\right|=1\ (a^2-28=\pm1)$ のとき　$a^2=27,\ 29$ となり不適。

(i-ii)　$\left|a^2-28\right|=2\ (a^2-28=\pm2)$ のとき　$a^2=26,\ 30$ となり不適。

(ii)　$b=3$ のとき

⑤より，$9\left|a^2-63\right|<12$ となり，$\left|a^2-63\right|=1$ である。

すると，$a^2=62,\ 64$ となり，適する自然数 a は $a=8$ である。

(i)(ii)より，①を満たすには，$a=8$，$b=3$ であることが必要となる。

以下，$a=8$，$b=3$ のとき，①を満たすかどうかを調べる。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{8}{3}$ より $2.666<\dfrac{a}{b}<2.667$ となり，また $2.645<\sqrt{7}<2.646$ なので，

$$0.02<\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<0.022$$

一方，$\dfrac{2}{b^4}=\dfrac{2}{81}$ となり，$0.024<\dfrac{2}{b^4}<0.025$ から①を満たしている。

以上より，不等式(A)を満たす自然数 $a,\ b$ の組は，$a=8$，$b=3$ のみである。

［解　説］

(1)は三角不等式だけですが，(2)は難です。(1)で得た緩い不等式④は誘導と考えるのが妥当ですので，まず①④から邪魔な $\sqrt{7}$ を消すことを考えます。そのための手段としては，足すか掛けるかですが，前者はうまくいかなかったので，後者で……。

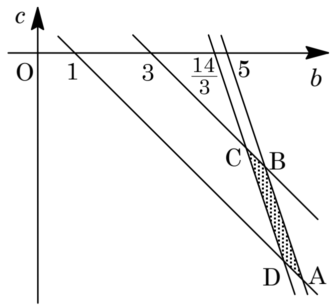
4　問題のページへ

(1)　$f(x)=-x^2+bx+c$ に対して，$0\leqq f(1)\leqq 2$，$5\leqq f(3)\leqq 6$ より，

$$0\leqq -1+b+c\leqq 2\cdots\cdots\cdots①,\ 5\leqq -9+3b+c\leqq 6\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-b+1\leqq c\leqq -b+3$

②より，$-3b+14\leqq c\leqq -3b+15$



この連立不等式を bc 平面上に図示すると，右図の網点をつけた平行四辺形の内部または辺上となる。

さらに，①②の境界線の方程式を連立して 4 つの頂点の座標を求めると，$\mathrm{A}(7,\ -6)$，$\mathrm{B}(6,\ -3)$，$\mathrm{C}\left(\frac{11}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(\frac{13}{2},\ -\frac{11}{2}\right)$ である。

さて，$f(4)=k$ とおくと，$-16+4b+c=k$ すなわち $c=-4b+k+16\cdots\cdots\cdots③$

そして，直線③が右上の領域と共有点をもつ k の範囲を求める。

すると，図より，k は $\mathrm{A}(7,\ -6)$ において最大値 $-16+28-6=6$ をとり，$\mathrm{C}\left(\frac{11}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ において最小値 $-16+22-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$ をとる。

よって，$\frac{7}{2}\leqq f(4)\leqq 6$ である。

(2)　$f(x)=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}+c$ より，放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標を q とすると，$q=\frac{b^2}{4}+c$ すなわち $c=-\frac{b^2}{4}+q\cdots\cdots④$ となる。

そして，放物線④が右上の領域と共有点をもつ q の範囲を求める。すると図より，頂点を通るとき，辺と接するときに，q は最大または最小になることがわかる。

そこで，$\mathrm{A}(7,\ -6)$ における q の値は $\frac{49}{4}-6=\frac{25}{4}$，$\mathrm{B}(6,\ -3)$ における q の値は $9-3=6$，$\mathrm{C}\left(\frac{11}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ における q の値は $\frac{121}{16}-\frac{5}{2}=\frac{81}{16}$，$\mathrm{D}\left(\frac{13}{2},\ -\frac{11}{2}\right)$ における q の値は $\frac{169}{16}-\frac{11}{2}=\frac{81}{16}$ である。

さらに，④から $c'=-\frac{b}{2}$ より，接線の傾きが -1 となるのは $-\frac{b}{2}=-1$ すなわち $b=2$ のときであるが，この点は辺 AD，辺 BC 上にはない。

また，接線の傾きが -3 となるのは $-\frac{b}{2}=-3$ すなわち $b=6$ のときであり，辺 AB，辺 CD 上の点について調べると，点 $\mathrm{B}(6,\ -3)$ および辺 CD の中点 $\mathrm{M}(6,\ -4)$ があてはまる。そして，M における q の値は $9-4=5$ である。

以上より，q のとりうる値の範囲は $5\leqq q\leqq\frac{25}{4}$ である。

(3)　$q=6$ のとき，$f(x)=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+6$ となる。

そこで，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は，$-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+6=0$ より，

$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{6}\,,\ \ x=\frac{b}{2}+\sqrt{6}$$

これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S は,

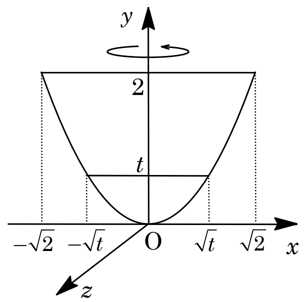
$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+6\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}$$

［解　説］

解法の方針は基本的なものですが，特に(2)において，詰めの部分がかなり面倒です。そのため，解答にすさまじい時間が必要です。なお，(3)は付録のような設問で，不思議なことに単独に解くことができます。

5　　問題のページへ



(1)　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 L を，y 軸に直交する平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で切断したときの切り口は，中心が点$(0,\ t,\ 0)$で半径が $\sqrt{t}$ の円板となるので，

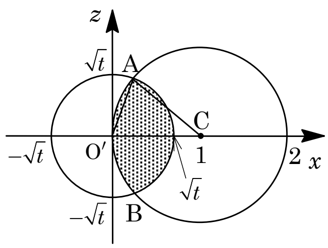
$$x^2+z^2\leqq t,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots①$$

また，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下の点で構成される円柱を $y=t$ で切断したときの切り口は，

$$(x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots②$$

すると，立体 M を $y=t$ で切断したときの切り口は，①②から，

$$x^2+z^2\leqq t,\ (x-1)^2+z^2\leqq 1,\ y=t$$



この連立不等式を平面 $y=t$ 上に図示すると右図の網点部になる。なお，$\mathrm{O}'(0,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ t,\ 0)$とし，2 円の交点を A, B とおく。すると，交点 A, B の x 座標は $x^2+z^2=t$ と $(x-1)^2+z^2=1$ を連立して，

$$2x-1=t-1,\ \ x=\frac{t}{2}$$

そこで，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{O'C}$ で $\mathrm{O'A}=\sqrt{t}$ より，$\sqrt{t}\cos\angle\mathrm{AO'C}=\dfrac{t}{2}$ となり，

$$2\cos\angle\mathrm{AO'C}=\sqrt{t},\ \ t=(2\cos\angle\mathrm{AO'C})^2$$

これより，$\angle\mathrm{AO'C}=\theta$ とおくことができ，$0\leqq t\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，網点部の面積を $S(t)$ とすると，$\angle\mathrm{ACO'}=\pi-2\theta$ から，

$$S(t)=2\Big\{\frac{1}{2}(\sqrt{t})^2\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\Big\}$$
$$=t\theta+\pi-2\theta-\sin2\theta=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin2\theta$$
$$=2\theta(1+\cos2\theta)+\pi-2\theta-\sin2\theta=2\theta\cos2\theta-\sin2\theta+\pi$$

(2)　M の体積 V とすると，$V=\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ となり，(1)より，

$$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos2\theta-\sin2\theta+\pi)(-8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\theta\cos2\theta-4\sin2\theta+4\pi)(\sin2\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin4\theta-2+2\cos4\theta+4\pi\sin2\theta)\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos4\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\Big[\sin4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0$，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\cos2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\theta\sin 4\theta\, d\theta = -\big[\,\theta\cos 4\theta\,\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\theta\, d\theta = -\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{3}{4}\pi$$

以上より，$V = -\dfrac{3}{4}\pi - 2\cdot\dfrac{\pi}{4} + 4\pi\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}\pi$ となる。

［解　説］

立体の体積計算という阪大の頻出問題です。(1)は(2)の計算を考えて，結論をまとめています。ただ，これでも(2)の積分計算は，簡単とはいえません。