1

解答解説のページへ

関数 $f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$ を考える。

(1)　$x=\sin t-\cos t$ とおくとき，$f(t)$ を x を用いて表せ。

(2)　t が $0\leqq t\leqq \pi$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

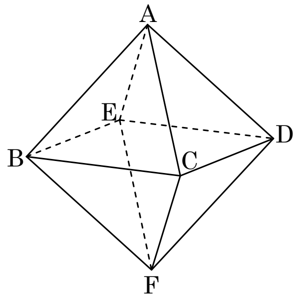
解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1) $\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx=0$ である確率を求めよ。

(2) $a,\ b$ が 2 以上かつ $2\log_a b-2\log_a c+\log_b c=1$ である確率を求めよ。

3　解答解説のページへ



座標空間に 6 点 A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(−1, 0, 0), E(0, −1, 0), F(0, 0, −1) を頂点とする正八面体 ABCDEF がある。s, t を $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし, 線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。

(1)　4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2)　線分 PQ の中点を L とし, 線分 RS の中点を M とする。s, t が $0<s<1$, $0<t<1$ の範囲を動くとき, 線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3)　正八面体 ABCDEF の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが(2)の値 m をとるとき, X を最大とするような s, t の値と, そのときの X の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$ に対して，$x=\sin t-\cos t$ とおくと，

$$x^2=1-2\sin t\cos t=1-\sin 2t\ ,\ \ \sin 2t=1-x^2$$

すると，$f(t)=x(1-x^2)=-x^3+x$ である。

(2)　$0\leqq t\leqq\pi$ のとき，$x=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ より，$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ となる。

$f(t)=g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=-3x^2+1$$

これより，$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

ここで，$-\frac{2}{9}\sqrt{3}>-\sqrt{2}$ に注意すると，$f(t)$ の最大値は $\frac{2}{9}\sqrt{3}$，最小値は $-\sqrt{2}$ である。

［解　説］

三角関数と微分と増減に関する頻出の問題です。(1)の誘導がなくても，普通は上記の方法で処理します。

2　　問題のページへ

(1)　まず，$(x-a)(x-b)=(x-a)(x-a+a-b)=(x-a)^2-(b-a)(x-a)$ から，

$$\int_a^c (x-a)(x-b)dx=\int_a^c \{(x-a)^2-(b-a)(x-a)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3-\frac{1}{2}(b-a)(x-a)^2\right]_a^c=\frac{1}{3}(c-a)^3-\frac{1}{2}(b-a)(c-a)^2$$

$$=\frac{1}{6}(c-a)^2\{2(c-a)-3(b-a)\}=\frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)$$

条件より，$\frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)=0$ となり，

(i)　$a=c$ のとき　b は任意なので，このときの確率は，$\frac{6\times 6\times 1}{6^3}=\frac{6}{36}$ である。

(ii)　$a\neq c$ のとき　$a-3b+2c=0$ となり，$b=\frac{a+2c}{3}$ を満たす $(a,\ c)$ は，

$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 3)$

この 6 組の $(a,\ c)$ に対し，b は 1 つずつ決まるので，このときの確率は，

$\frac{6\times 1}{6^3}=\frac{1}{36}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{6}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$ である。

(2)　$a\geqq 2$，$b\geqq 2$ のとき，$2\log_a b-2\log_a c+\log_b c=1$ から，

$2\log_a b-2\log_a c+\frac{\log_a c}{\log_a b}=1$

ここで，$p=\log_a b$，$q=\log_a c$ とおくと，$2p-2q+\frac{q}{p}=1$ となり，

$2p^2-2pq+q-p=0$，$(p-q)(2p-1)=0$

(i)　$p=\frac{1}{2}$ のとき　$\log_a b=\frac{1}{2}$ から $b=\sqrt{a}$ となり，$a\geqq 2$，$b\geqq 2$ から，

$(a,\ b)=(4,\ 2)$

c は任意なので，このときの確率は，$\frac{1\times 6}{6^3}=\frac{1}{36}$ である。

(ii)　$p\neq\frac{1}{2}$ のとき　$p=q$ から $\log_a b=\log_a c$ すなわち $b=c$

ここで，$b\geqq 2$ から $(b,\ c)$ の組は 5 通りあり，a は $a\geqq 2$ で任意なので，5 組の $(b,\ c)$ に対し，a は 5 つずつ決まる。ただし，$(a,\ b,\ c)=(4,\ 2,\ 2)$ は除く。

このときの確率は，$\frac{5\times 5-1}{6^3}=\frac{4}{36}$ である。

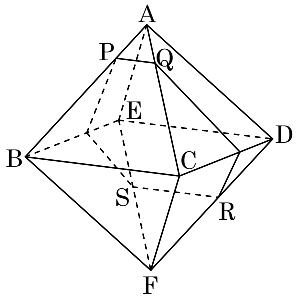
(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{1}{36}+\frac{4}{36}=\frac{5}{36}$ である。

［解　説］

他領域の計算問題と融合した確率の基本的な問題です。

3

問題のページへ



(1)　A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(0, 1, 0)，D(−1, 0, 0)，E(0, −1, 0)，F(0, 0, −1)で，正八面体 ABCDEF を構成する。そして，条件より，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=1-s:s\cdots\cdots\cdots①$$
$$\mathrm{FR}:\mathrm{RD}=\mathrm{FS}:\mathrm{SE}=1-t:t\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\mathrm{P}(1-s,\ 0,\ s)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1-s,\ s)$

②より，$\mathrm{R}(t-1,\ 0,\ -t)$，$\mathrm{S}(0,\ t-1,\ -t)$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s-1,\ 1-s,\ 0)=(1-s)(-1,\ 1,\ 0)\cdots\cdots\cdots③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=(t-1,\ 1-t,\ 0)=(1-t)(-1,\ 1,\ 0)\cdots\cdots\cdots④$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\dfrac{1-t}{1-s}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ から SR // PQ となり，4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある。

(2)　線分 PQ, SR の中点をそれぞれ L, M とすると，

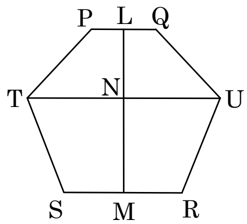
$$\mathrm{L}\Big(\frac{1-s}{2},\ \frac{1-s}{2},\ s\Big),\ \mathrm{M}\Big(\frac{t-1}{2},\ \frac{t-1}{2},\ -t\Big)$$

すると，$\mathrm{LM}^2=\dfrac{1}{4}(2-s-t)^2+\dfrac{1}{4}(2-s-t)^2+(s+t)^2=\dfrac{1}{2}(2-s-t)^2+(s+t)^2$

ここで，$s+t=v$ とおくと，$0<s<1$，$0<t<1$ から $0<v<2$ であり，

$$\mathrm{LM}^2=\frac{1}{2}(2-v)^2+v^2=\frac{3}{2}v^2-2v+2=\frac{3}{2}\Big(v-\frac{2}{3}\Big)^2+\frac{4}{3}$$

これより，$v=\dfrac{2}{3}$ のとき LM は最小値 $m=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。



(3)　(2)より，$s+t=\dfrac{2}{3}$ で $\mathrm{LM}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，4 点 P, Q, R, S を通る平面と BE, CD との交点をそれぞれ T, U とおくと，切り口は右図のような六角形になり，③④から，

$$\mathrm{PQ}=(1-s)\sqrt{1+1}=\sqrt{2}(1-s)$$
$$\mathrm{SR}=(1-t)\sqrt{1+1}=\sqrt{2}(1-t)$$

さて，PQ // SR なので，対称性から BT : TE = CU : UD となり，

$$\mathrm{TU}\,/\!/\,\mathrm{BC},\ \mathrm{TU}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$$

これより，TU は PQ, SR それぞれと平行であり，四角形 PQUT, RSTU はいずれも等脚台形になる。

そして，LM は PQ, SR それぞれと垂直であり，LM と TU の交点を N とおくと，LN : MN = $s:t$ から，

$$\mathrm{LN}=\frac{s}{s+t}\mathrm{LM}=\frac{3}{2}s\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}s,\ \mathrm{MN}=\frac{t}{s+t}\mathrm{LM}=\frac{3}{2}t\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}t$$

したがって，切り口 PQURST の面積 X は，

$$X=\frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-s)+\sqrt{2}\}\cdot\sqrt{3}s+\frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-t)+\sqrt{2}\}\cdot\sqrt{3}t$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s+\frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t=\frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t)-(s+t)^2+2st\}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+2st\right)=\frac{4}{9}\sqrt{6}+\sqrt{6}st$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，

$$\frac{2}{3}=s+t\geqq 2\sqrt{st}\,,\ \ st\leqq\frac{1}{9}$$

等号は $s=t=\frac{1}{3}$ のとき成立し，$0<s<1$，$0<t<1$ を満たしている。

以上より，X は $s=t=\frac{1}{3}$ のとき，最大値 $\frac{4}{9}\sqrt{6}+\frac{1}{9}\sqrt{6}=\frac{5}{9}\sqrt{6}$ をとる。

［解　説］

空間図形の計量問題です。正八面体の頂点の座標が与えらえているため，メインに利用するのが，この座標かそれとも図形的な知識か，またベクトルを利用するならば成分表示をするかしないかなど，いろいろな立場が考えられます。この意味で，解答例は旗幟鮮明とは言い難いものになっています。特に(3)の前半部ですが……。