1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ の範囲で不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2　　解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とし，$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$ とする。

(1)　c を実数とし，$f(x)$ が $x-c$ で割り切れるとする。このとき，$c>0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ。

(2)　$f(x)$ がある実数 $s,\ t,\ u,\ v$ を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a\geqq 4$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a=5$ とする。$f(x)$ がある実数 $s,\ t,\ u,\ v$ を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

2 つの関数 $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x=f(t),\ y=g(t)\ \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) t が $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

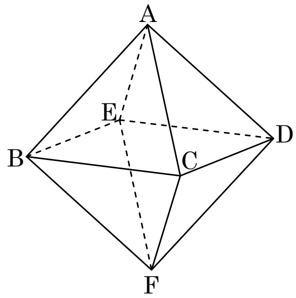
(2) t_1，t_2 を $0\leqq t_1<t_2\leqq\frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3) C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標空間に 6 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{E}(0,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{F}(0,\ 0,\ -1)$ を頂点とする正八面体 ABCDEF がある。s, t を $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし，線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。



(1)　4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2)　線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする。s, t が $0<s<1$, $0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3)　正八面体 ABCDEF の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが(2)の値 m をとるとき，X を最大とするような s, t の値と，そのときの X の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

p, q を $0<p<1$, $0<q<1$ を満たす実数とし, n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする。

(1)　n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

1　　　　問題のページへ

(1)　まず，$f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\ (x>0)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

これより，$f(x)>f(0)=0$ となり，$\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ ………①

次に，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)\ (x>0)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\Big(\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\Big)-\frac{1}{1+x}=\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{4+4x+x^2}-\sqrt{4+4x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}>0$$

これより，$g(x)>g(0)=0$ となり，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}>\log(1+x)$ ………②

①②から，$x>0$ で，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ………③

(2)　$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ ……④に対して，

$$y'=-\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2-(1+x)\{\log(1+x)\}^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2}$$

②より，$\dfrac{x^2}{1+x}>\{\log(1+x)\}^2$ すなわち $x^2>(1+x)\{\log(1+x)\}^2$ となり，$y'<0$ から，④は $x>0$ で単調に減少する。

ここで，$x\to\infty$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to 0$ である。

また，$0<x<2$ において，$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}>0$ となるので，③から，

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)},\quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{2-(2-x)}{x(2-x)}$$

すると，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{2-(2-x)}{x(2-x)}=\dfrac{1}{2-x}\to\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\to\frac{1}{2}$$

よって，$x\to+0$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to\dfrac{1}{2}$ となる。

以上より，$x>0$ で，④のとり得る範囲は，$0<y<\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

微分の応用と関数の極限に関する基本的な問題です。

2　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$　$(a>0,\ b>0)$ に対して，$f(x)$ が $x-c$ で割り切れることから，$f(c)=0$ となり，

$$c^4-ac^3+bc^2-ac+1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$c=0$ のときは $c^4-ac^3+bc^2-ac+1=1$ から①は成り立たず，$c<0$ のときは $c^4-ac^3+bc^2-ac+1>0$ から①は成り立たない。

よって，①が成立する c は $c>0$ である。そして，このとき①から，

$$f\Big(\frac{1}{c}\Big)=\frac{1}{c^4}-\frac{a}{c^3}+\frac{b}{c^2}-\frac{a}{c}+1=\frac{1}{c^4}(1-ac+bc^2-ac^3+c^4)=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$c\neq 1$ のとき

このとき $c\neq\dfrac{1}{c}$ となり，①②から，$f(x)$ は $(x-c)\Big(x-\dfrac{1}{c}\Big)$ で割り切れる。

(ii)　$c=1$ のとき

①から，$1-a+b-a+1=0$ となり，$b=2a-2$ より，

$$f(x)=x^4-ax^3+(2a-2)x^2-ax+1$$

因数分解すると，$f(x)=(x-1)^2\{x^2+(-a+2)x+1\}$ となるので，この場合も，$f(x)$ は $(x-c)\Big(x-\dfrac{1}{c}\Big)$ で割り切れる。

(2)　$f(x)$ が $f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$ と因数分解できるとき，定数項に注意すると，(1)から $s>0$，$t>0$ として，$u=\dfrac{1}{s}$，$v=\dfrac{1}{t}$ とおくことができ，

$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=(x-s)(x-t)\Big(x-\frac{1}{s}\Big)\Big(x-\frac{1}{t}\Big)\cdots\cdots\cdots③$$

x^3 の係数を比較して，$-a=-s-t-\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}$ となり，$a=s+\dfrac{1}{s}+t+\dfrac{1}{t}\cdots\cdots\cdots④$

また，x の係数を比較したときも，④が得られる。

そこで，相加平均と相乗平均の関係から，④は，

$$a=s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}+2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=4$$

(3)　$a=5$ のとき，④から $s+\dfrac{1}{s}+t+\dfrac{1}{t}=5\cdots\cdots⑤$ となり，③の x^2 の係数を比較して，

$$b=st+\frac{1}{st}+\frac{t}{s}+\frac{s}{t}+2=\Big(s+\frac{1}{s}\Big)\Big(t+\frac{1}{t}\Big)+2\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$p=s+\dfrac{1}{s}$，$q=t+\dfrac{1}{t}$ とおくと，$p\geqq 2$，$q\geqq 2$ で，⑤⑥より，

$$p+q=5\cdots\cdots\cdots⑦,\ \ b=pq+2\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より，$q=5-p\geqq 2$ となり，$2\leqq p\leqq 3$ において，

$$b=p(5-p)+2=-p^2+5p+2=-\Big(p-\frac{5}{2}\Big)^2+\frac{33}{4}$$

すると，$2\leqq p\leqq 3$ で $8\leqq b\leqq\dfrac{33}{4}$ となり，自然数 b の値は $b=8$ である。

［解 説］

相反方程式を題材にした高次方程式に関する問題です。細かな誘導がついていますので，因数定理などを用いた論証を丁寧に行う必要があります。

3

問題のページへ

(1)　まず，$f(t)=2\sin t+\cos 2t$ に対して，

$$f'(t)=2\cos t-2\sin 2t=2\cos t-4\sin t\cos t=2\cos t(1-2\sin t)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

これより，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)$ は $t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

また，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ に対して，

$$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t=-2\sin t+2(1-2\sin^2 t)=-2(2\sin^2 t+\sin t-1)=-2(2\sin t-1)(\sin t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

これより，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ における $g(t)$ の増減は右表のようになり，$g(t)$ は $t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

(2)　$0\leqq t_1<t_2\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $f(t_1)=f(t_2)$ より，$2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2$

$$2\sin t_1+1-2\sin^2 t_1=2\sin t_2+1-2\sin^2 t_2$$

$$\sin t_2-\sin t_1-\sin^2 t_2+\sin^2 t_1=0,\ (\sin t_2-\sin t_1)(1-\sin t_2-\sin t_1)=0$$

すると，$\sin t_2-\sin t_1>0$ から，$\sin t_1+\sin t_2=1\cdots\cdots\cdots①$

さて，$g(t)^2=(2\cos t+\sin 2t)^2$ について，

$$g(t)^2=4\cos^2 t(1+\sin t)^2=4(1-\sin^2 t)(1+\sin t)^2=4(1-\sin t)(1+\sin t)^3$$

ここで，$u=\sin t$ とおき，$h(u)=(1-u)(1+u)^3\ (0\leqq u\leqq 1)$ と設定すると，

$$g(t)^2=4h(u)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$u_1=\sin t_1$，$u_2=\sin t_2$ とおくと，$0\leqq u_1<u_2\leqq 1$ となり，②から，

$$g(t_1)^2=4h(u_1),\ g(t_2)^2=4h(u_2)$$

また，①から，$u_1+u_2=1\cdots\cdots\cdots③$

③から，$h(u_1)=(1-u_1)(1+u_1)^3=u_2(1+u_1)^3$，$h(u_2)=u_1(1+u_2)^3$ となり，

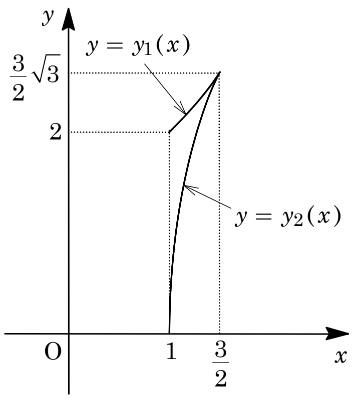
$$h(u_1)-h(u_2)=u_2(1+u_1)^3-u_1(1+u_2)^3$$
$$=(u_2-u_1)+3u_1u_2(u_1-u_2)+u_1u_2(u_1^2-u_2^2)$$
$$=(u_2-u_1)\{1-3u_1u_2-u_1u_2(u_1+u_2)\}=(u_2-u_1)(1-4u_1u_2)$$

ここで，③および $u_1<u_2$ に注意すると，相加平均と相乗平均の関係から，

$$1=u_1+u_2>2\sqrt{u_1u_2},\ 4u_1u_2<1$$

よって，$h(u_1)-h(u_2)>0$ となり，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ である。

(3)　曲線 $C: x = f(t)$，$y = g(t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の概形は，(1)(2)から，右図のようになる。ここで，C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分を $y = y_1(x)$，$\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を $y = y_2(x)$ とおくと，C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S は，



$$S = \int_1^{\frac{3}{2}} \{y_1(x) - y_2(x)\} dx$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} y_1(x) dx - \int_1^{\frac{3}{2}} y_2(x) dx$$

ここで，変数を x から t に置き換えると，

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t) f'(t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} g(t) f'(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t) f'(t) dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g(t) f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) f'(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t - 2\sin 2t \cos t - 2\sin^2 2t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\cos 2t - \sin 3t - \sin t - 1 + \cos 4t) dt$$

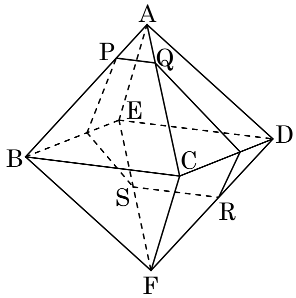
$$= \left[t + \frac{1}{3}\cos 3t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}(-1) + (-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

［解 説］

パラメータ曲線と面積についての問題です。曲線 C の概形を書くために，(2)にかなりのボリュームのある問題が設定されています。

4

問題のページへ



(1)　$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{E}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{F}(0,\ 0,\ -1)$で，正八面体 ABCDEF を構成する。そして，条件より，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=1-s:s\cdots\cdots\cdots①$$

$$\mathrm{FR}:\mathrm{RD}=\mathrm{FS}:\mathrm{SE}=1-t:t\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\mathrm{P}(1-s,\ 0,\ s)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1-s,\ s)$

②より，$\mathrm{R}(t-1,\ 0,\ -t)$，$\mathrm{S}(0,\ t-1,\ -t)$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s-1,\ 1-s,\ 0)=(1-s)(-1,\ 1,\ 0)\cdots\cdots\cdots③$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=(t-1,\ 1-t,\ 0)=(1-t)(-1,\ 1,\ 0)\cdots\cdots\cdots④$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\dfrac{1-t}{1-s}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$から SR // PQ となり，4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある。

(2)　線分 PQ, SR の中点をそれぞれ L, M とすると，

$$\mathrm{L}\Big(\frac{1-s}{2},\ \frac{1-s}{2},\ s\Big),\ \mathrm{M}\Big(\frac{t-1}{2},\ \frac{t-1}{2},\ -t\Big)$$

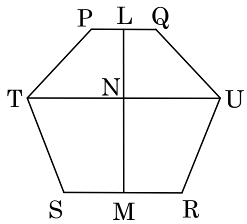
すると，$\mathrm{LM}^2=\dfrac{1}{4}(2-s-t)^2+\dfrac{1}{4}(2-s-t)^2+(s+t)^2=\dfrac{1}{2}(2-s-t)^2+(s+t)^2$

ここで，$s+t=v$とおくと，$0<s<1$，$0<t<1$から$0<v<2$であり，

$$\mathrm{LM}^2=\frac{1}{2}(2-v)^2+v^2=\frac{3}{2}v^2-2v+2=\frac{3}{2}\Big(v-\frac{2}{3}\Big)^2+\frac{4}{3}$$

これより，$v=\dfrac{2}{3}$のとき LM は最小値$m=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$をとる。

(3)　(2)より，$s+t=\dfrac{2}{3}$で$\mathrm{LM}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$のとき，4 点 P, Q, R, S を通る平面と BE, CD との交点をそれぞれ T, U とおくと，切り口は右図のような六角形になり，③④から，



$$\mathrm{PQ}=(1-s)\sqrt{1+1}=\sqrt{2}(1-s)$$

$$\mathrm{SR}=(1-t)\sqrt{1+1}=\sqrt{2}(1-t)$$

さて，PQ // SR なので，対称性から$\mathrm{BT}:\mathrm{TE}=\mathrm{CU}:\mathrm{UD}$となり，

$$\mathrm{TU}\,/\!/\,\mathrm{BC},\ \mathrm{TU}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$$

これより，TU は PQ, SR それぞれと平行であり，四角形 PQUT, RSTU はいずれも等脚台形になる。

そして，LM は PQ, SR それぞれと垂直であり，LM と TU の交点を N とおくと，$\mathrm{LN}:\mathrm{MN}=s:t$から，

$$\mathrm{LN}=\frac{s}{s+t}\mathrm{LM}=\frac{3}{2}s\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}s,\ \mathrm{MN}=\frac{t}{s+t}\mathrm{LM}=\frac{3}{2}t\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}t$$

したがって，切り口 PQURST の面積 X は，

$$X=\frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-s)+\sqrt{2}\}\cdot\sqrt{3}s+\frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-t)+\sqrt{2}\}\cdot\sqrt{3}t$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s+\frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t=\frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t)-(s+t)^2+2st\}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\Big(\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+2st\Big)=\frac{4}{9}\sqrt{6}+\sqrt{6}st$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，

$$\frac{2}{3}=s+t\geqq 2\sqrt{st}\,,\ \ st\leqq\frac{1}{9}$$

等号は $s=t=\frac{1}{3}$ のとき成立し，$0<s<1$，$0<t<1$ を満たしている。

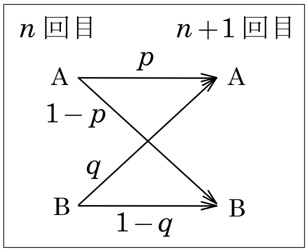
以上より，X は $s=t=\frac{1}{3}$ のとき，最大値 $\frac{4}{9}\sqrt{6}+\frac{1}{9}\sqrt{6}=\frac{5}{9}\sqrt{6}$ をとる。

［解 説］

空間図形の計量問題です。正八面体の頂点の座標が与えらえているため，メインに利用するのが，この座標かそれとも図形的な知識か，またベクトルを利用するならば成分表示をするかしないかなど，いろいろな立場が考えられます。この意味で，解答例は旗幟鮮明とは言い難いものになっています。特に(3)の前半部ですが……。

$\boxed{5}$　問題のページへ

(1)　n 試合目に A が勝つ確率を a_n とすると，引き分けがないことより，B が勝つ確率は $1-a_n$ となる。



また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であることより，

$$a_{n+1}=pa_n+q(1-a_n)=(p-q)a_n+q$$

変形すると，$a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p+q}=(p-q)\Big(a_n-\dfrac{q}{1-p+q}\Big)$ となり，$a_1=p$ から，

$$a_n-\frac{q}{1-p+q}=\Big(a_1-\frac{q}{1-p+q}\Big)(p-q)^{n-1}=\Big(p-\frac{q}{1-p+q}\Big)(p-q)^{n-1}$$

$$=\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}(p-q)^{n-1}=\frac{1-p}{1-p+q}(p-q)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{1-p+q}\{(1-p)(p-q)^n+q\}$ である。

(2)　$n\geqq 3$ として，n 回試合を行うとき，B が連勝せずに k 回目と l 回目 $(k<l)$ に勝つとする。このとき勝つチームを並べて示すと，

(i)　$k=1$ かつ $l=n$ のとき　B→A→A→A→A→……→A→A→B

A→B が 1 回，B→A が 1 回，A→A が $n-3$ 回より，その確率は，

$$(1-p)\times(1-p)qp^{n-3}=p^{n-3}(1-p)^2q$$

(ii)　$2\leqq k\leqq n-2$ かつ $l=n$ のとき　A→B→A→A→A→……→A→A→B など

A→B が 2 回，B→A が 1 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)^2qp^{n-4}=(n-3)p^{n-3}(1-p)^2q$$

(iii)　$k=1$ かつ $3\leqq l\leqq n-1$ のとき　B→A→B→A→A→……→A→A→A など

A→B が 1 回，B→A が 2 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$(1-p)\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)q^2p^{n-4}=(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(iv)　$2\leqq k<k+1<l\leqq n-1$ のとき　A→B→A→B→A→……→A→A→A など

A→B が 2 回，B→A が 2 回，A→A が $n-5$ 回で，$(k,\ l)$ の決め方が ${}_{n-3}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので，その確率は，$n\geqq 5$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_2(1-p)^2q^2p^{n-5}=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(i)～(iv)より，B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n は，

$$b_n=\{1+(n-3)\}p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-3)\{2+(n-4)\}p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

$$=(n-2)p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

$$=\frac{1}{2}(n-2)p^{n-4}(1-p)^2q\{2p+(n-3)q\}\quad(n=3,\ 4\text{ のときも成立})$$

［解　説］

(1)は確率と漸化式という頻出題, (2)は数え上げるタイプの確率問題でミスに要注意です。そのため, (2)では n に具体的な数値を代入して, チェックしながら計算を進めていくのが, 1 つの有効な方法となります。