1　　解答解説のページへ

r を正の実数とする。複素数平面上で，点 z が点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$z+w=zw$ を満たす点 w が描く図形を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ。

(2)　$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき，$f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\cos\alpha$ は無理数であることを示せ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$f(x)=\log(x+1)+1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2) (1)の解を α とする。実数 x が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を，$x_1=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。このとき，すべての自然数 n に対して，$\alpha-x_{n+1}<\frac{1}{2}(\alpha-x_n)$ が成り立つことを示せ。

(4) (3)の数列 $\{x_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を示せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^{\pi}, \quad y = e^t \sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

複素数平面上で，点 z は，点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 r $(r>0)$ の円周上を動くことより，

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$z+w=zw$ を満たす点 w に対して，$(w-1)z=w\ \cdots\cdots\cdots②$

ここで，$w=1$ とすると，②は成り立たないので，$w\neq1$ のもとで，

$$z=\frac{w}{w-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③を①に代入すると，$\left|\frac{w}{w-1}-\frac{3}{2}\right|=r$ となり，$\left|\frac{-w+3}{2(w-1)}\right|=r$ から，

$$|-w+3|=r|2(w-1)|,\ |w-3|=2r|w-1|\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると，④は $w\neq1$ を満たしており，以下，$2r=1$ と $2r\neq1$ に場合分けをして，点 w が描く図形を求める。

(i)　$2r=1\left(r=\frac{1}{2}\right)$ のとき

④より $|w-3|=|w-1|$ となるので，点 w が描く図形は，点 3 と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線である。

(ii)　$2r\neq1\left(r\neq\frac{1}{2}\right)$ のとき

④より $|w-3|^2=4r^2|w-1|^2$ となり，$(w-3)(\overline{w}-3)=4r^2(w-1)(\overline{w}-1)$ から，

$$(4r^2-1)w\overline{w}-(4r^2-3)w-(4r^2-3)\overline{w}=9-4r^2$$

$4r^2-1\neq0$ より，$w\overline{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\overline{w}=\frac{9-4r^2}{4r^2-1}$

$$\left(w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)\left(\overline{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)=\left(\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)^2+\frac{9-4r^2}{4r^2-1}$$

$$\left|w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|^2=\frac{16r^2}{(4r^2-1)^2},\ \left|w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|=\frac{4r}{|4r^2-1|}$$

これより，点 w が描く図形は，中心が点 $\frac{4r^2-3}{4r^2-1}$ で半径が $\frac{4r}{|4r^2-1|}$ の円である。

［解 説］

複素数平面上の軌跡についての超頻出題です。今年は東京工大でも同じ趣旨の問題が出ています。

2　　問題のページへ

(1)　$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ のとき，$7\alpha=2\pi$ から $4\alpha=2\pi-3\alpha$ となり，

$$\cos 4\alpha=\cos(2\pi-3\alpha)=\cos 3\alpha\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=2(2\cos^2\alpha-1)^2-1=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$ から，①より，

$$8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=0$$

すると，$(\cos\alpha-1)(8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1)=0$ となり，$0<\cos\alpha<1$ から，

$$8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1=0$$

よって，$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とするとき，$f(\cos\alpha)=0$ が成り立つ。

(3)　p,q を互いに素な自然数として，$\cos\alpha=\dfrac{q}{p}$ とおくと，$f(\cos\alpha)=0$ から，

$$\frac{8q^3}{p^3}+\frac{4q^2}{p^2}-\frac{4q}{p}-1=0,\ \ 8q^3+4pq^2-4p^2q-p^3=0$$

これより，$p^3=q(8q^2+4pq-4p^2)\cdots\cdots\cdots ②$

ここで，p と q は互いに素なので，p^3 と q も互いに素となり，②から q は p^3 の約数なので，$q=1$ である。

このとき，②は $p^3=8+4p-4p^2$ となり，$p(p^2+4p-4)=8\cdots\cdots\cdots ③$

③より，p は 8 の約数となり，$p=1,\ 2,\ 4,\ 8$ である。

・$p=1$ のとき　$p^2+4p-4=1$ となり，③を満たさない。

・$p=2$ のとき　$p^2+4p-4=8$ となり，③を満たさない。

・$p=4$ のとき　$p^2+4p-4=28$ となり，③を満たさない。

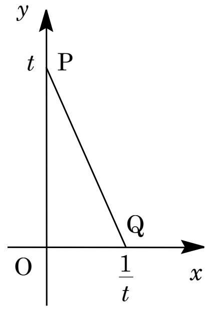
・$p=8$ のとき　$p^2+4p-4=92$ となり，③を満たさない。

以上より，③を満たす自然数 p は存在しないので，$p,\ q$ を互いに素な自然数として，$\cos\alpha=\dfrac{q}{p}$ と表せない。すなわち，$\cos\alpha$ は無理数である。

［解　説］

まったく同じ問題を経験済みかもしれませんが，三角関数の値を題材にした有名な論証問題です。(3)の背理法の証明は，いろいろな方法が考えられます。

3　　問題のページへ



$t>0$のとき，2 点$\mathrm{P}(0,\ t)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 0\right)$を端点とする線分の方程式は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$のもとで，

$$tx+\frac{y}{t}=1,\ t^2x+y=t\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，t が$1\leqq t\leqq 2$の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する点$(x,\ y)$は，$(*)$を t についての方程式としてみたとき，$1\leqq t\leqq 2$に解を少なくとも 1 つもつ条件として得られる。

$(*)$から，$xt^2-t+y=0$となり，$f(t)=xt^2-t+y$とおくと，

(i)　$x=0$のとき

$f(t)=-t+y$となり，$f(t)=0$から$t=y$なので，$1\leqq y\leqq 2$である。

(ii)　$x>0$のとき

$f(t)=x\left(t-\frac{1}{2x}\right)^2-\frac{1}{4x}+y$から$f\left(\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{4x}+y$であり，また$f(1)=x-1+y$，$f(2)=4x-2+y$となるので，$t=\frac{1}{2x}$と$1\leqq t\leqq 2$の関係から，

(ii-i)　$\frac{1}{2x}<1\left(x>\frac{1}{2}\right)$のとき

$f(t)=0$の解が$1\leqq t\leqq 2$に少なくとも 1 つある条件は，

$$f(1)\leqq 0\ \text{かつ}\ f(2)\geqq 0$$

よって，$x-1+y\leqq 0$かつ$4x-2+y\geqq 0$から，$-4x+2\leqq y\leqq -x+1$

(ii-ii)　$1\leqq\frac{1}{2x}\leqq 2\left(\frac{1}{4}\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$のとき

$f(t)=0$の解が$1\leqq t\leqq 2$に少なくとも 1 つある条件は，

$$f\left(\frac{1}{2x}\right)\leqq 0\ \text{かつ（}f(1)\geqq 0\text{または}f(2)\geqq 0\text{）}$$

よって，$-\frac{1}{4x}+y\leqq 0$かつ（$x-1+y\geqq 0$または$4x-2+y\geqq 0$）から，

$$y\leqq\frac{1}{4x}\text{かつ（}y\geqq -x+1\text{または}y\geqq -4x+2\text{）}$$

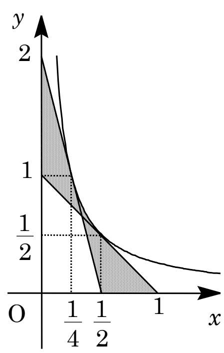
(ii-iii)　$\frac{1}{2x}>2\left(0<x<\frac{1}{4}\right)$のとき

$f(t)=0$の解が$1\leqq t\leqq 2$に少なくとも 1 つある条件は，

$$f(1)\geqq 0\ \text{かつ}\ f(2)\leqq 0$$

よって，$x-1+y\geqq 0$かつ$4x-2+y\leqq 0$から，

$$-x+1\leqq y\leqq -4x+2$$



(i)(ii)より，線分 PQ の動く範囲は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

［解 説］

線分の通過領域の問題です。上の解答例は，方程式の解の配置として処理をしましたが，たとえばxを固定してyのとりうる範囲を調べるという方法もあります。

$\boxed{4}$　　　　　問題のページへ

(1)　$f(x)=\log(x+1)+1$ に対して，$g(x)=f(x)-x=\log(x+1)+1-x$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ となり，$g(x)$ は単調に減少する。

そして，$g(0)=1$，$g(3)=\log 4-2=\log 4-\log e^2<0$ より，$g(x)=0$ すなわち $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲にただ 1 つの解をもつ。

(2)　$f(\alpha)=\alpha$ として，$0<x<\alpha$ のとき，平均値の定理より，

$$\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}=\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}=f'(c)\quad(x<c<\alpha)\cdots\cdots\cdots①$$

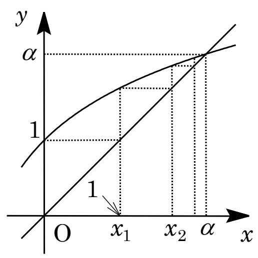
さて，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0$ から，$f'(x)$ は単調に減少するので，$0<x<c<\alpha$ において，

$$f'(\alpha)<f'(c)<f'(x)\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$f'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$ なので，①②より，$0<\dfrac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)\cdots\cdots\cdots③$

(3)　$g(2)=\log 3-1=\log 3-\log e>0$，(1)から $g(3)<0$ なので，$2<\alpha<3$ である。

ここで，$x_1=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ で定められた数列 $\{x_n\}$ に対し，まず $1\leqq x_n<\alpha$ であることを数学的帰納法で示す。



(i)　$n=1$ のとき

$x_1=1$ より，$1\leqq x_1<\alpha$ であり，$n=1$ のとき成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき

$1\leqq x_k<\alpha$ と仮定すると，$f(x)$ は単調に増加するので $f(1)\leqq f(x_k)<f(\alpha)$ となり，$f(1)-1=g(1)=\log 2>0$ なので，

$$1<f(x_k)<\alpha$$

$x_{k+1}=f(x_k)$ より，$1<x_{k+1}<\alpha$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$1\leqq x_n<\alpha$ である。

すると，③より，$0<\dfrac{\alpha-f(x_n)}{\alpha-x_n}<f'(x_n)$ となり，$\alpha-x_n>0$ から，

$$0<\alpha-f(x_n)<f'(x_n)(\alpha-x_n),\ 0<\alpha-x_{n+1}<f'(x_n)(\alpha-x_n)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$f'(x_n)=\dfrac{1}{x_n+1}$ であり，$0<\dfrac{1}{x_n+1}\leqq\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ なので，

$$0<f'(x_n)\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\alpha-x_{n+1}<\dfrac{1}{2}(\alpha-x_n)\cdots\cdots\cdots⑥$

(4)　$x_n<\alpha$ と合わせると，⑥より，$0<\alpha-x_n\leqq(\alpha-x_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

すると，$n \to \infty$ のとき，$(\alpha - x_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$ から $\alpha - x_n \to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

［解 説］

一般項が求めにくい漸化式で定められた数列について，その極限を求める問題です。平均値の定理を利用するという有名な方法が誘導で与えられています。

5

問題のページへ

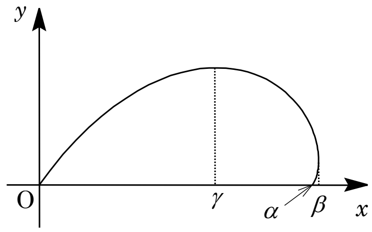
曲線$C: x=e^t\cos t+e^{\pi}$，$y=e^t\sin t$に対し，$x=f(t)$，$y=g(t)$とおくと，

$$f'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t=-\sqrt{2}e^t\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$g'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t=\sqrt{2}e^t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$	α	↗	β	↘	γ	↘	0
$g'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗		↗		↘	0

すると，$0\leqq t\leqq\pi$における$f(t)$，$g(t)$の増減は右表のようになる。ただし，$\alpha=1+e^{\pi}$，$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}+e^{\pi}$，$\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\pi}+e^{\pi}$である。



これより，曲線Cの概形は右図の通りである。

さて，曲線Cの$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}$の部分を$y=y_1(x)$，$\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\pi$の部分を$y=y_2(x)$とおくと，曲線$C$と$x$軸で囲まれた部分の面積$S$は，

$$S=\int_0^{\beta}y_2(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}y_1(x)dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}}g(t)f'(t)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}g(t)f'(t)dt$$

$$=-\int_0^{\pi}g(t)f'(t)dt=-\int_0^{\pi}e^t\sin t\cdot e^t(\cos t-\sin t)dt$$

$$=-\int_0^{\pi}e^{2t}\sin t\cos t\,dt+\int_0^{\pi}e^{2t}\sin^2 t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}\sin 2t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}(1-\cos 2t)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}(\sin 2t+\cos 2t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}dt=-\frac{1}{4}\left[e^{2t}\sin 2t\right]_0^{\pi}+\frac{1}{4}\left[e^{2t}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)$$

［解　説］

パラメータ曲線に囲まれた面積を求めるという頻出題です。積分計算も面倒というほどではありません。