$\boxed{1}$ 解答例のページへ

平面上の三角形 OAB を考える。$\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=t$ とする。また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，$\mathrm{OC}=1$ とする。線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ。

(2)　線分 OR の長さを t を用いて表せ。

(3)　線分 OB の中点を M とする。点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答例のページへ

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　正の整数 $k,\ l$ に対して，$\dfrac{k}{k+l-1}a_{k+1}a_l+\dfrac{l}{k+l-1}a_ka_{l+1}=a_ka_l$ が成り立つことを示せ。

(2)　正の整数 m に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_ka_{m-k+1}=1$ が成り立つことを示せ。

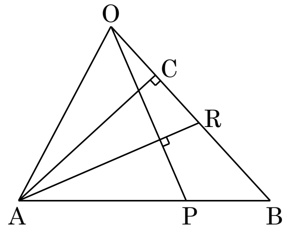
3

解答例のページへ

座標平面において，$y=x^2-1$ で表される放物線を C とする。C 上の点 P における C の接線を l とする。ただし，点 P は y 軸上にはないものとする。O を原点とし，放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S，放物線 C と接線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする。$S-T$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=t$，$\angle\mathrm{AOB}$が鋭角の$\triangle\mathrm{OAB}$ において，A からOB に垂線OC を下ろし，$\mathrm{OC}=1$であるとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=t$$

(2)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:1$より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

また, A からOP に垂線を下ろし, OB との交点をR とするとき$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となる。

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=0$から，$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$となり，

$$-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(k-2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0,\quad -9+(k-2)t+2kt^2=0$$

すると，$t(2t+1)k=2t+9$から，$k=\dfrac{2t+9}{t(2t+1)}>0$なので,

$$\mathrm{OR}=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{2t+9}{t(2t+1)}\cdot t=\frac{2t+9}{2t+1}$$

(3)　線分OB の中点をM とすると$\mathrm{OM}=\dfrac{t}{2}$となり, R が線分MB 上にある条件は,

$$\frac{t}{2}\leqq\frac{2t+9}{2t+1}\leqq t,\quad t(2t+1)\leqq 2(2t+9)\leqq 2t(2t+1)$$

まず，$t(2t+1)\leqq 2(2t+9)$に対して，$2t^2-3t-18\leqq 0$となり，

$$\frac{3-3\sqrt{17}}{4}\leqq t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$2(2t+9)\leqq 2t(2t+1)$に対して，$2t^2-t-9\geqq 0$となり，

$$t\leqq\frac{1-\sqrt{73}}{4},\quad \frac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\cdots\cdots\cdots②$$

したがって，$t>0$と①②を合わせると，$\dfrac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}$である。

［コメント］

平面ベクトルの基本題です。最後の計算はちょっと面倒でしたが。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2n-1}{2n}a_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$ka_{k+1}a_l+la_ka_{l+1}=k\cdot\frac{2k-1}{2k}a_ka_l+la_k\cdot\frac{2l-1}{2l}a_l=\frac{2k-1}{2}a_ka_l+\frac{2l-1}{2}a_ka_l$$
$$=(k+l-1)a_ka_l$$

したがって，$\dfrac{k}{k+l-1}a_{k+1}a_l+\dfrac{l}{k+l-1}a_ka_{l+1}=a_ka_l$ ……①が成り立つ。

(2)　まず，正の整数 m に対して，$S(m)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_ka_{m-k+1}$ とする。

①において，$l=m-k+1$ とおくと，$1\leqq k\leqq m$ から $l\geqq 1$ となり，

$$\frac{k}{m}a_{k+1}a_{m-k+1}+\frac{m-k+1}{m}a_ka_{m-k+2}=a_ka_{m-k+1}$$
$$ma_ka_{m-k+1}=ka_{k+1}a_{m-k+1}+(m-k+1)a_ka_{m-k+2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，以下，$S(m)=1$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$m=1$ のとき　$S(1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_ka_{2-k}=a_1a_1=a_1^{\,2}=1$ より成り立つ。

(ii)　$m=i$ のとき　$S(i)=\displaystyle\sum_{k=1}^{i}a_ka_{i-k+1}=1$ が成り立つと仮定する。

このとき，$S(i+1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{i+1}a_ka_{i-k+2}=\sum_{k=1}^{i}a_ka_{i-k+2}+a_{i+1}a_1$ となり，

$$S(i+1)-S(i)=\sum_{k=1}^{i}a_ka_{i-k+2}-\sum_{k=1}^{i}a_ka_{i-k+1}+a_{i+1}a_1$$
$$=\sum_{k=1}^{i}(a_ka_{i-k+2}-a_ka_{i-k+1})+a_{i+1}a_1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，②から，$m(a_ka_{m-k+1}-a_ka_{m-k+2})=ka_{k+1}a_{m-k+1}-(k-1)a_ka_{m-k+2}$ となり，

$$a_ka_{m-k+2}-a_ka_{m-k+1}=\frac{1}{m}\{(k-1)a_ka_{m-k+2}-ka_{k+1}a_{m-k+1}\}$$

そして，$m=i$ と置き換えて，

$$a_ka_{i-k+2}-a_ka_{i-k+1}=\frac{1}{i}\{(k-1)a_ka_{i-k+2}-ka_{k+1}a_{i-k+1}\}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

さらに，$b_k=(k-1)a_ka_{i-k+2}$ とおくと，$b_{k+1}=ka_{k+1}a_{i-k+1}$ となることより，④は $a_ka_{i-k+2}-a_ka_{i-k+1}=\dfrac{1}{i}(b_k-b_{k+1})$ と表せるので，③に代入して，

$$S(i+1)-S(i)=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}(b_k-b_{k+1})+a_{i+1}a_1$$
$$=\frac{1}{i}\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_i-b_{i+1})\}+a_{i+1}a_1$$
$$=\frac{1}{i}(b_1-b_{i+1})+a_{i+1}a_1=\frac{1}{i}(0-ia_{i+1}a_1)+a_{i+1}a_1=0$$

すると，$S(i+1)=S(i)=1$ となり，$m=i+1$ のときも成り立つ。

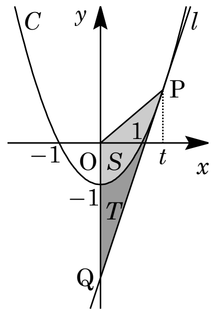
(i)(ii)より，正の整数 m に対して，$S(m)=\sum_{k=1}^{m} a_k a_{m-k+1} = 1$ が成り立つ。

［コメント］

漸化式と数学的帰納法の融合問題です。ただ，(1)の結果を，(2)でどのように利用すればよいのか，その方法を見つけるのに時間をかなり費やしてしまいます。

3

問題のページへ



放物線$C: y = x^2 - 1$に対して，C 上の点$\mathrm{P}(t,\ t^2 - 1)$とすると，$y' = 2x$から，Pにおける接線lの方程式は，

$$y - (t^2 - 1) = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 - 1$$

そして，lとy軸の交点をQとおくと，$\mathrm{Q}(0,\ -t^2 - 1)$となる。

さて，$t \neq 0$のとき，Cと線分OPおよびy軸で囲まれた図形の面積をS，Cとlおよびy軸で囲まれた図形の面積をTとするとき，$S - T$の値については，y軸についての対称性から$t > 0$として，

$$S - T = (S + T) - 2T = \frac{1}{2}(t^2 + 1)t - 2\int_0^t \{(x^2 - 1) - (2tx - t^2 - 1)\}dx$$

$$= \frac{1}{2}(t^3 + t) - 2\int_0^t (x^2 - 2tx + t^2)dx = \frac{1}{2}(t^3 + t) - 2\Big[\frac{x^3}{3} - tx^2 + t^2x\Big]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}(t^3 + t) - \frac{2}{3}t^3 + 2t^3 - 2t^3 = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t$$

ここで，$f(t) = S - T = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t$とおくと，

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t + 1)(t - 1)$$

すると，$t > 0$における$f(t)$の増減は右表のようになり，これより$S - T$の最大値は$\frac{1}{3}$である。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

［コメント］

微積分の基本題です。$S - T$は普通に計算してもよいのですが，解答例では$S + T$が△OPQの面積であることを利用して，計算量を減らしています。