1

解答例のページへ

平面上の三角形 OAB を考える。$\angle$AOB は鋭角，OA $=3$，OB $=t$ とする。また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，OC $=1$ とする。線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ。

(2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ。

(3) 線分 OB の中点を M とする。点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

2

解答例のページへ

p と m を実数とし，関数 $f(x)=x^3+3px^2+3mx$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする。

(1) $f(\alpha)-f(\beta)$ を p と m を用いて表せ。

(2) p と m が $f(\alpha)-f(\beta)=4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ。

3

解答例のページへ

座標空間に 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(0,\ 1,\ 1)$，P$(x,\ y,\ 0)$ がある。$\angle\mathrm{OAP}=30^\circ$ かつ $y \geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$t>0$ のとき，$-\dfrac{1}{t}<\displaystyle\int_t^{2t}\dfrac{\sin x}{x^2}dx<\dfrac{1}{t}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\dfrac{\cos x}{x}dx=0$ を示せ。

(3)　$f(x)=\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\dfrac{f(x)}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^{2}\dfrac{\cos x}{x}dx$ を示せ。

5

解答例のページへ

投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインがある。A, B, C の 3 文字をBAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う。

・表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる。

・裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる。

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる。

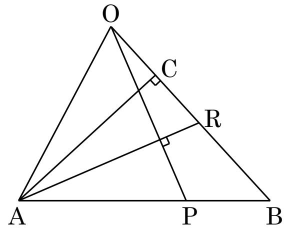
最初の文字列は ABC であるとする。コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする。

(1)　k を正の整数とするとき，$p_{2k}-q_{2k}$ を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，p_n を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=t$，$\angle\mathrm{AOB}$ が鋭角の $\triangle\mathrm{OAB}$ において，A から OB に垂線 OC を下ろし，$\mathrm{OC}=1$ であるとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=t$$

(2)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

また, A から OP に垂線を下ろし, OB との交点を R とするとき $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=0$ から，$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(k-2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0,\quad -9+(k-2)t+2kt^2=0$$

すると，$t(2t+1)k=2t+9$ から，$k=\dfrac{2t+9}{t(2t+1)}>0$ なので,

$$\mathrm{OR}=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{2t+9}{t(2t+1)}\cdot t=\frac{2t+9}{2t+1}$$

(3)　線分 OB の中点を M とすると $\mathrm{OM}=\dfrac{t}{2}$ となり, R が線分 MB 上にある条件は,

$$\frac{t}{2}\leqq\frac{2t+9}{2t+1}\leqq t,\quad t(2t+1)\leqq 2(2t+9)\leqq 2t(2t+1)$$

まず，$t(2t+1)\leqq 2(2t+9)$ に対して，$2t^2-3t-18\leqq 0$ となり，

$$\frac{3-3\sqrt{17}}{4}\leqq t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$2(2t+9)\leqq 2t(2t+1)$ に対して，$2t^2-t-9\geqq 0$ となり，

$$t\leqq\frac{1-\sqrt{73}}{4},\quad \frac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\cdots\cdots\cdots②$$

したがって，$t>0$ と①②を合わせると，$\dfrac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}$ である。

［コメント］

平面ベクトルの基本題です。最後の計算はちょっと面倒でしたが。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+3px^2+3mx$ に対して，$f'(x)=3x^2+6px+3m=3(x^2+2px+m)$

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるので，その増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，$f'(x)=0$ の 2 つの解が $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ であるので，$p^2-m>0$ で，

$$\alpha=-p-\sqrt{p^2-m}\,,\ \beta=-p+\sqrt{p^2-m}$$

このとき，$f(\alpha)-f(\beta)=\bigl[\,f(x)\bigr]_\beta^\alpha$ と考えて，

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=\int_\beta^\alpha 3(x^2+2px+m)dx$$

$$=3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}\bigl(2\sqrt{p^2-m}\,\bigr)^3=4\bigl(\sqrt{p^2-m}\,\bigr)^3$$

(2)　$f(\alpha)-f(\beta)=4$ から $4\bigl(\sqrt{p^2-m}\,\bigr)^3=4$ となり，$p^2-m=1$ ………(＊)

さて，$f''(x)=3(2x+2p)=6(x+p)$ から，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を $(x,\ y)$ とおくと，$f''(x)=0$ から $x=-p$ となり，また(＊)から $m=p^2-1$ なので，

$$y=f(-p)=-p^3+3p^3-3(p^2-1)p=-p^3+3p$$

すると，$y=-(-x)^3+3(-x)=x^3-3x$ となり，変曲点の軌跡は，

曲線：$y=x^3-3x$

[コメント]

3 次関数のグラフの極大値と極小値の差という有名問題です。類題を『2 次数学ランドマーク』の「微分と積分」の第 1 問に，同じ解法で掲載しています。

3

問題のページへ

3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0,\ -1,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y-1,\ -1)$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}$，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-(y-1)+1=-y+2$

さて，$\angle\mathrm{OAP}=30°$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos 30°$ から，

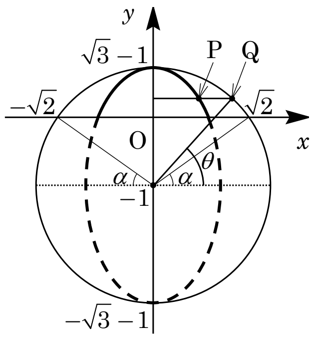
$$-y+2=\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-y+2\geqq 0$ $(y\leqq 2)$ のもとで，$(-y+2)^2=\frac{3}{2}\{x^2+(y-1)^2+1\}$ となり，

$$2(y^2-4y+4)=3(x^2+y^2-2y+2),\ 3x^2+y^2+2y=2$$

これより，$3x^2+(y+1)^2=3$ から，$x^2+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1\cdots\cdots\cdots(*)$

したがって，xy 平面上の点 P の軌跡は，$y\geqq 0$ と合わせて，楕円$(*)$の $0\leqq y\leqq 2$ の部分である。



図示すると，右図の太実線部となる。

ここで，中心 $(0,\ -1)$ で半径 $\sqrt{3}$ の円周上の $y\geqq 0$ の部分に点 $\mathrm{Q}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta-1)$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\pi-\alpha)$ をとる。

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

このとき，点 Q と y 軸との距離を $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍した点が楕円$(*)$上の点 P となり，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta-1)$ と表すことができる。

すると，$x=\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\sin\theta-1$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\pi-\alpha)$ から，$f(\theta)=(x+1)(y+1)$ とおくと，$f(\theta)=\sqrt{3}(\cos\theta+1)\sin\theta$ となり，

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\sqrt{3}\{(-\sin\theta)\sin\theta+(\cos\theta+1)\cos\theta\}=\sqrt{3}(-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta)\\&=\sqrt{3}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\&=\sqrt{3}(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$\alpha\leqq\theta\leqq\pi-\alpha$ における $f(\theta)$ の増減は，$\alpha<\dfrac{\pi}{3}<\pi-\alpha$ から，右表のようになる。

θ	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\pi-\alpha$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	

そして，$f(\alpha)=\sqrt{3}(\cos\alpha+1)\sin\alpha=\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+1\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1$ となり，

$$f(\pi-\alpha)=\sqrt{3}(-\cos\alpha+1)\sin\alpha=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}+1$$

以上より，$(x+1)(y+1)$ の最大値は $\dfrac{9}{4}$，最小値は $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1$ である。

［コメント］

空間ベクトルと 2 次曲線の融合問題です。後半は楕円のパラメータ表示を利用しましたが，図に示したように，θ の意味に注意が必要です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$-\dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{\sin x}{x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ から，$t>0$ のとき，各辺を t から $2t$ まで積分すると，

$$-\int_t^{2t}\frac{1}{x^2}dx \leqq \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx \leqq \int_t^{2t}\frac{1}{x^2}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_t^{2t}\frac{1}{x^2}dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_t^{2t} = -\frac{1}{2t}+\frac{1}{t} = \frac{1}{2t} < \frac{1}{t}$ より，$\displaystyle -\frac{1}{t} < \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx < \frac{1}{t}$

(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx = 0$ ……①となり，

$$\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}dx = \Big[\frac{\sin x}{x}\Big]_t^{2t} + \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx = \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx$$

ここで，$t>0$ のとき，$-\dfrac{1}{2t} \leqq \dfrac{\sin 2t}{2t} \leqq \dfrac{1}{2t}$，$-\dfrac{1}{t} \leqq \dfrac{\sin t}{t} \leqq \dfrac{1}{t}$ より，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin 2t}{2t} = 0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t} = 0$$

したがって，①と合わせ，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}dx = 0$ ………②

(3)　$f(x) = \sin\Big(\dfrac{3x}{2}\Big)\sin\Big(\dfrac{x}{2}\Big) = -\dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos x) = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ から，

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^t\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^t\frac{\cos 2x}{x}dx \quad\text{………③}$$

ここで，$u = 2x$ とおくと，$du = 2dx$ で，$x = 1 \to t$ のとき $u = 2 \to 2t$ から，

$$\int_1^t\frac{\cos 2x}{x}dx = \int_2^{2t}\frac{2\cos u}{u}\cdot\frac{1}{2}du = \int_2^{2t}\frac{\cos u}{u}du = \int_2^{2t}\frac{\cos x}{x}dx$$

③に代入して，

$$\begin{aligned}\int_1^t\frac{f(x)}{x}dx &= \frac{1}{2}\int_1^t\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_2^{2t}\frac{\cos x}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx + \frac{1}{2}\int_2^t\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_2^{2t}\frac{\cos x}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_t^2\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_2^{2t}\frac{\cos x}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}dx\end{aligned}$$

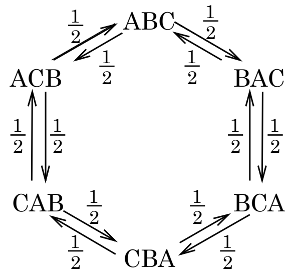
すると，②から，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{f(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx$ となる。

［コメント］

定積分と極限の融合問題で，阪大で頻出のタイプです。(1)→(2), (2)→(3)という誘導が丁寧につけられています。

5

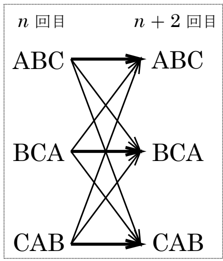
問題のページへ



題意の操作を行うと，右の 6 つの文字列が現れる。

ここで，最初の文字列が ABC であるとき，コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n , BCA である確率を q_n , CAB である確率を r_n とおく。

すると，$p_1=q_1=r_1=0$，$p_2=\dfrac{1}{2}$，$q_2=r_2=\dfrac{1}{4}$ であり，n 回目と $n+2$ 回目の状態の推移図は右図のようになる。なお，太矢印，細矢印の表す推移確率は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$ である。



そして，これを漸化式として立式すると，

$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}r_n \cdots\cdots\cdots①$$

$$q_{n+2}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}r_n \cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+2}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n \cdots\cdots\cdots③$$

(1)　①－②より，$p_{n+2}-q_{n+2}=\dfrac{1}{4}p_n-\dfrac{1}{4}q_n=\dfrac{1}{4}(p_n-q_n)$ となり，$n=2k$ のとき，

$$p_{2k+2}-q_{2k+2}=\frac{1}{4}(p_{2k}-q_{2k})$$

すると，$p_{2k}-q_{2k}=(p_2-q_2)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}$ となる。

(2)　①＋②＋③より，$p_{n+2}+q_{n+2}+r_{n+2}=p_n+q_n+r_n$ となり，

(i)　n が偶数 $(n=2k)$ のとき　$p_{2k+2}+q_{2k+2}+r_{2k+2}=p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}$

これより，$p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=p_2+q_2+r_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=1$ となり，①から，

$$p_{2k+2}=\frac{1}{2}p_{2k}+\frac{1}{4}(q_{2k}+r_{2k})=\frac{1}{2}p_{2k}+\frac{1}{4}(1-p_{2k})=\frac{1}{4}p_{2k}+\frac{1}{4}$$

すると，$p_{2k+2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left(p_{2k}-\dfrac{1}{3}\right)$ から，

$$p_{2k}-\frac{1}{3}=\left(p_2-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$

よって，n が偶数のとき，$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ である。

(ii)　n が奇数 $(n=2k-1)$ のとき　$p_1=q_1=r_1=0$ なので，①②③から帰納的に，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0$$

よって，n が奇数のとき，$p_n=0$ である。

［コメント］

確率と漸化式の問題です。(1)の問題文から，まず n を偶奇に分けて考えました。