$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

平面上の 4 点 O, P, Q, R が条件

$$\mathrm{OP} = 2,\ \ \mathrm{OQ} = 3,\ \ \angle\mathrm{POQ} = 60^\circ,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{0}$$

を満たすとする。線分 OR の長さと $\cos\angle\mathrm{POR}$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

単位円周上の 3 点

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{Q}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ \mathrm{R}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$$

を考える。θ が $0°$ から $360°$ まで動くとき,

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$$

がとる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

放物線 $y = x^2 + 1$ 上に点 P をとる。原点 O と P を結ぶ線分 OP を

$$t^2 : (1 - t^2) \quad (0 < t < 1)$$

に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P が放物線上を動くとき点 Q が描く曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y = x^2 + 1$ と曲線 C が囲む図形の面積 S を求めよ。

(3) $0 < t < 1$ における S の最大値を求めよ。

$\boxed{1}$

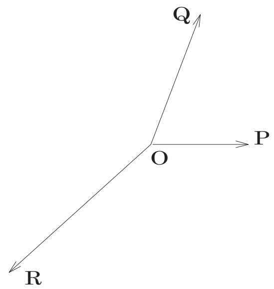
問題のページへ

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$なので，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2&=|-\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2\\&=2^2+2\cdot3+3^2=19\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\sqrt{19}$



同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$$

$$9=4+2\cdot2\cdot\sqrt{19}\cdot\cos\angle\mathrm{POR}+19$$

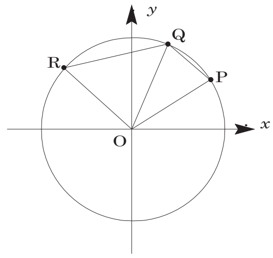
よって，$\cos\angle\mathrm{POR}=-\dfrac{7}{2\sqrt{19}}$

［解 説］

ベクトルの内積に関する基本問題です。誘導はありませんが，2 つの設問を同じ方針で解いてみました。

2

問題のページへ



$$\mathrm{PQ}^2=(\cos 2\theta-\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-\sin\theta)^2$$
$$=1+1-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)$$
$$=2-2\cos\theta$$
$$\mathrm{QR}^2=(\cos 4\theta-\cos 2\theta)^2+(\sin 4\theta-\sin 2\theta)^2$$
$$=1+1-2(\cos 4\theta\cos 2\theta+\sin 4\theta\sin 2\theta)$$
$$=2-2\cos 2\theta$$
$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2=(2-2\cos\theta)+(2-2\cos 2\theta)$$
$$=4-2\cos\theta-2\cos 2\theta$$
$$=-4\cos^2\theta-2\cos\theta+6=-4\left(\cos\theta+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 360^\circ$ から，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$ は，連続的に値が変化し，$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{25}{4}$ をとり，

$\cos\theta=1$ のとき最小値 0 をとるので，

$$0\leqq\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2\leqq\frac{25}{4}$$

［解 説］

三角比の利用も考えられますが，この場合，一般性の失われる可能性があるかどうかを点検しなくてはいけません。座標計算で解けばその心配はありませんので，そうしました。計算も難しくはありません。

3

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(u,\ v)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$とすると，

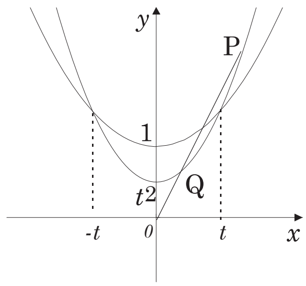
$$v=u^2+1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$より，$(x,\ y)=t^2(u,\ v)$

$$u=\frac{x}{t^2},\quad v=\frac{y}{t^2}\cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入して，$\dfrac{y}{t^2}=\dfrac{x^2}{t^4}+1$

曲線Cの方程式は，$y=\dfrac{x^2}{t^2}+t^2\cdots\cdots\cdots③$



(2)　③と$y=x^2+1$の交点のx座標は，$x^2+1=\dfrac{x^2}{t^2}+t^2$

変形して，$\dfrac{1-t^2}{t^2}(x-t)(x+t)=0$より，$x=\pm t$

$$S=\int_{-t}^{t}-\frac{1-t^2}{t^2}(x-t)(x+t)\,dx=-\frac{1-t^2}{t^2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(2t)^3=\frac{4}{3}(t-t^3)$$

(3)　$S'=\dfrac{4}{3}(1-3t^2)$

$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のときSは最大値をとる。

このとき，$S=\dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\dfrac{8}{27}\sqrt{3}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
S'		＋	0	－	
S		↗		↘	

［解 説］

本問は 3 つの小問に分かれていますが, (1)(2)の誘導がなくても方針に迷いは生じません。計算ミスが致命的という問題です。