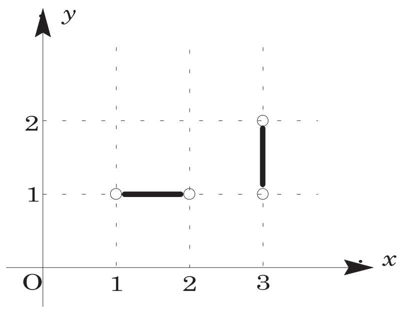
$\boxed{1}$

解答解説のページへ

座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(630,\ 5400)$ を通る直線 $y=ax$（a は定数）は $0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

(2)　n を 2 以上の整数とする。点 $\mathrm{P}(630,\ 5400)$ を通る曲線 $y=bx^n$（b は n により定まる定数）は $0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。



格子辺の例

2

解答解説のページへ

n を 1 以上の整数とする。n 次の整式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

とその導関数 $f'(x)$ の間に

$$nf(x)=(x+p)f'(x)$$

という関係があるとする。ただし, p は定数である。このとき

$$f(x)=a_0(x+p)^n$$

であることを示せ。

3

解答解説のページへ

(1)　a を 1 より大きい実数とする。0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log 2+\frac{x}{2}\log a \leqq \log(1+a^x) \leqq \log 2+\frac{x}{2}\log a+\frac{x^2}{8}(\log a)^2$$

ただし，対数は自然対数である。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して，$a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ とおく。(1)の不等式を用いて極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

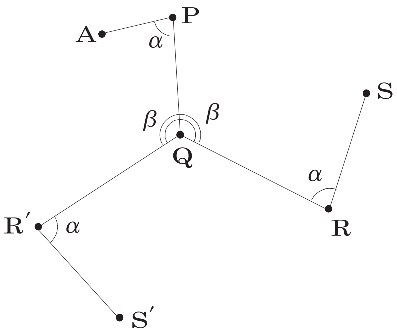
平面上において, 7 点 A，P，Q，R，S，R′，S′ を下図のようにとる。ただし,

$\mathrm{AP} = a$，$\mathrm{PQ} = b$，$\mathrm{QR} = \mathrm{QR'} = c$，$\mathrm{RS} = \mathrm{R'S'} = d$

$\angle\mathrm{APQ} = \angle\mathrm{SRQ} = \angle\mathrm{S'R'Q} = \alpha$　$(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$

$\angle\mathrm{RQP} = \angle\mathrm{PQR'} = \beta$　$(0 \leqq \beta \leqq \pi)$

である。このとき，$\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AS'}^2$ を $\sin\alpha$，$\sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。



$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

座標空間において

平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1

平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2

とする。また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，

円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m

円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M

とする。次の問いに答えよ。

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ。

(2) $|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする。図形 H の体積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$y=ax$ が点 P$(630,\ 5400)$ を通ることより，$5400=630a$，$a=\dfrac{60}{7}$

よって，$y=\dfrac{60}{7}x$………①

$0<x\leqq 630$ の範囲で，①が通る格子点の x 座標は，

$x=7,\ 7\times 2,\ 7\times 3,\cdots\cdots,7\times 90$

ここで，一般的に曲線または直線が点$(m,\ n)$という格子点を通るとき，$x=m$ 上の格子辺との交点と $y=n$ 上の格子辺との交点，合わせて 2 個の交点が消失する。

これより，求める格子辺との交点の数は，$630+5400-90\times 2=5850$

(2)　$y=bx^n$ が点 P$(630,\ 5400)$ を通ることより，$5400=630^n\cdot b$，$b=\dfrac{5400}{630^n}$

$$y=\frac{5400}{630^n}x^n=\frac{2^3\cdot 3^3\cdot 5^2}{(2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)^n}x^n=\frac{1}{2^{n-3}\cdot 3^{2n-3}\cdot 5^{n-2}\cdot 7^n}x^n\cdots\cdots\cdots②$$

(i) $n=2$ のとき

②は $y=\dfrac{2}{3\cdot 7^2}x^2$……③となり, x が $3\cdot 7=21$ の倍数のとき y が整数となる。

$0<x\leqq 630$ の範囲で，③が通る格子点の x 座標は，

$x=21,\ 21\times 2,\ 21\times 3,\cdots\cdots,21\times 30$

求める格子辺との交点の数は，$630+5400-30\times 2=5970$

(ii)　$n=3$ のとき

②は $y=\dfrac{1}{3^3\cdot 5\cdot 7^3}x^3$……④となり，$x$ が $3\cdot 5\cdot 7=105$ の倍数のとき y が整数となる。

$0<x\leqq 630$ の範囲で，④が通る格子点の x 座標は，

$x=105,\ 105\times 2,\ 105\times 3,\cdots\cdots,105\times 6$

求める格子辺との交点の数は，$630+5400-6\times 2=6018$

(iii)　$n\geqq 4$ のとき

$1\leqq n-3<n$，$n<2n-3<2n$，$2\leqq n-2<n$ となることより，②から x が $2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=630$ の倍数のとき y が整数となる。

$0<x\leqq 630$ の範囲で，②が通る格子点の x 座標は，$x=630$

求める格子辺との交点の数は，$630+5400-1\times 2=6028$

［解 説］

(2)の(iii)は，初めは $n=4$ のときも考えて，$0<x<630$ では格子点を通らないことから，$n=5,\ 6,\cdots$ の場合も同じだろうと予測し，その理由を考えたものです。

2

問題のページへ

$f(x)$を$x+p$について展開し，x^nの係数（$a_0\neq 0$）を比較すると，

$$f(x)=a_0(x+p)^n+b_1(x+p)^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}(x+p)+b_n$$

すなわち，$f(x)=a_0(x+p)^n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k(x+p)^{n-k}$

(i)　$n\geqq 2$のとき

$$nf(x)=na_0(x+p)^n+\sum_{k=1}^{n}nb_k(x+p)^{n-k}$$

$$(x+p)f'(x)=(x+p)\left\{na_0(x+p)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)b_k(x+p)^{n-k-1}\right\}$$

$$=na_0(x+p)^n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)b_k(x+p)^{n-k}$$

条件より，$nf(x)=(x+p)f'(x)$が恒等的に成立するので，

$nb_k=(n-k)b_k$　$(k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-1)$………①

$nb_n=0$………②

①より$kb_k=0$なので，$1\leqq k\leqq n-1$より$b_k=0$

②より$b_n=0$

よって，$f(x)=a_0(x+p)^n$

(ii)　$n=1$のとき

$f(x)=a_0(x+p)+b_1$とおくと，

$nf(x)=a_0(x+p)+b_1$，$(x+p)f'(x)=a_0(x+p)$から，条件より$b_1=0$

よって，$f(x)=a_0(x+p)$

(i)(ii)より，すべての自然数nで$f(x)=a_0(x+p)^n$

［解 説］

少々荒っぽいのですが，与えられた式を$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{n}{x+p}$と変形して両辺を積分し，$\log|f(x)|=n\log|x+p|+C=\log e^c|x+p|^n$から，$f(x)=\pm e^c(x+p)^n$とします。この後，$x^n$の係数を比較すると$f(x)=a_0(x+p)^n$を示すことができます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) $f(x)=\log(1+a^x)-\log 2-\dfrac{x}{2}\log a$ とおく。

$$f'(x)=\frac{a^x\log a}{1+a^x}-\frac{1}{2}\log a=\frac{2a^x\log a-(1+a^x)\log a}{2(1+a^x)}=\frac{(a^x-1)\log a}{2(1+a^x)}$$

$a>1$，$x\geqq 0$ より，$f'(x)\geqq 0$

$x\geqq 0$ で，$f(x)\geqq f(0)=\log(1+1)-\log 2=0$

また，$g(x)=\log 2+\dfrac{x}{2}\log a+\dfrac{x^2}{8}(\log a)^2-\log(1+a^x)$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{2}\log a+\frac{x}{4}(\log a)^2-\frac{a^x\log a}{1+a^x}=\log a\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\log a-\frac{a^x}{1+a^x}\right)$$

$h(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}\log a-\dfrac{a^x}{1+a^x}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}\log a+\dfrac{1}{1+a^x}$ とおく。

$$h'(x)=\frac{1}{4}\log a-\frac{a^x\log a}{(1+a^x)^2}=\frac{(1-a^x)^2}{4(1+a^x)^2}\log a\geqq 0\quad (a>1\text{ より})$$

$x\geqq 0$ で，$h(x)\geqq h(0)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+1}=0$

$a>1$ より，$\log a>0$ なので $g'(x)\geqq 0$

$x\geqq 0$ で，$g(x)\geqq g(0)=\log 2-\log(1+1)=0$

以上より，$\log 2+\dfrac{x}{2}\log a\leqq\log(1+a^x)\leqq\log 2+\dfrac{x}{2}\log a+\dfrac{x^2}{8}(\log a)^2$

(2) $a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n=\dfrac{(1+3^{\frac{1}{n}})^n}{2^n}$ より，$\log a_n=n\log\left(1+3^{\frac{1}{n}}\right)-n\log 2$

ここで, (1)の式において $a=3$，$x=\dfrac{1}{n}$ とおくと,

$$\log 2+\frac{1}{2n}\log 3\leqq\log\left(1+3^{\frac{1}{n}}\right)\leqq\log 2+\frac{1}{2n}\log 3+\frac{1}{8n^2}(\log 3)^2$$

$$\frac{1}{2}\log 3\leqq n\log\left(1+3^{\frac{1}{n}}\right)-n\log 2\leqq\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{8n}(\log 3)^2$$

$$\frac{1}{2}\log 3\leqq\log a_n\leqq\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{8n}(\log 3)^2$$

$n\to\infty$ とすると，はさみうちの原理より $\log a_n\to\dfrac{1}{2}\log 3=\log\sqrt{3}$

対数関数は定義された変域において連続なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$

［解 説］

(1)の不等式を誘導として用いて a_n の極限を求めるわけですが，$\log a_n$ を考えれば，$a=3$，$x=\dfrac{1}{n}$ と対応づけるのに迷いはないでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。
また, $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$ とおく。

すると, 点 P を表す複素数は b となり, 点 A を表す複素数は,

$$b+(0-b)\cdot\frac{a}{b}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=b-a\overline{z}$$

点 R, R′ を表す複素数は, それぞれ $c\overline{w}$, cw となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\overline{w}+(0-c\overline{w})\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=c\overline{w}-d\overline{w}\overline{z}=\overline{w}(c-d\overline{z})$$

点S′ を表す複素数は,

$$cw+(0-cw)\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=cw-dw\overline{z}=w(c-d\overline{z})$$

ここで $b-a\overline{z}=u$, $c-d\overline{z}=v$ とおくと, $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{S}(\overline{w}v)$, $\mathrm{S}'(wv)$ となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2&=|\overline{w}v-u|^2-|wv-u|^2\\&=(\overline{w}v-u)(w\overline{v}-\overline{u})-(wv-u)(\overline{w}\overline{v}-\overline{u})\\&=-\overline{w}\overline{u}v-wu\overline{v}+w\overline{u}v+\overline{w}u\overline{v}=(\overline{u}v-u\overline{v})(w-\overline{w})\end{aligned}$$

そこで,
$$\begin{aligned}\overline{u}v-u\overline{v}&=(b-az)(c-d\overline{z})-(b-a\overline{z})(c-dz)\\&=-bd\overline{z}-acz+bdz+ac\overline{z}\\&=(bd-ac)(z-\overline{z})=(bd-ac)\cdot 2i\sin\alpha\end{aligned}$$

また, $w-\overline{w}=2i\sin\beta$ より,

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=(bd-ac)(4i^2)\sin\alpha\sin\beta=4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$$

［解 説］

昨年度の第 2 問と同じように, 新旧両課程で異なった解法の考えられる問題です。上の解では複素数平面を利用してみました。その方針さえ決まれば, 計算を簡略化するための置き換えを適当に行えば, 結論を導くことはさほど困難ではありません。過去問を演習したかどうかで差のつく問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$\mathrm{Q}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{R}(\sqrt{2}\cos\varphi,\ \sqrt{2}\sin\varphi,\ -\sqrt{2})$とおく。

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (x-\sqrt{2}\cos\theta)^2+(y-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(z-\sqrt{2})^2\\ &= x^2+y^2-2\sqrt{2}(x\cos\theta+y\sin\theta)+2+(z-\sqrt{2})^2\\ &= r^2-2\sqrt{2}r\sin(\theta+\alpha)+2+(z-\sqrt{2})^2\quad\left(\sin\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\alpha=\frac{y}{r}\right)\end{aligned}$$

$\sin(\theta+\alpha)=1$のとき，PQ^2は最小値m^2をとる。

$$m=\sqrt{r^2-2\sqrt{2}r+2+(z-\sqrt{2})^2}=\sqrt{(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}^2 &= (x-\sqrt{2}\cos\varphi)^2+(y-\sqrt{2}\sin\varphi)^2+(z+\sqrt{2})^2\\ &= r^2-2\sqrt{2}r\sin(\varphi+\alpha)+2+(z+\sqrt{2})^2\quad\left(\sin\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\alpha=\frac{y}{r}\right)\end{aligned}$$

$\sin(\varphi+\alpha)=-1$のとき，PR^2は最大値M^2をとる。

$$M=\sqrt{r^2+2\sqrt{2}r+2+(z+\sqrt{2})^2}=\sqrt{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2}$$

(2)　$|M-2\sqrt{6}|\geqq m$より，$(M-2\sqrt{6})^2\geqq m^2$，$M^2-4\sqrt{6}M+24\geqq m^2$

$$(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2-4\sqrt{6}M+24\geqq(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2$$

まとめて，$r+z+3\sqrt{2}\geqq\sqrt{3}M$

$r+z+3\sqrt{2}\geqq 0\cdots\cdots$ ①のもとで，両辺2乗すると，

$$r^2+z^2+18+2rz+6\sqrt{2}r+6\sqrt{2}z\geqq 3\left\{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2\right\}$$

まとめて，$r^2-rz+z^2-3\leqq 0\cdots\cdots$②

さてここで，$z=k$での断面を考えると，

①は，$r+k+3\sqrt{2}\geqq 0\cdots\cdots$ ①$'$

②は，$r^2-kr+k^2-3\leqq 0\cdots\cdots$②$'$

不等式②$'$が解をもつのは，$k^2-4(k^2-3)\geqq 0$，すなわち$-2\leqq k\leqq 2\cdots\cdots$③のときである。

③のもとで，$r\geqq 0$より①$'$はつねに満たされる。

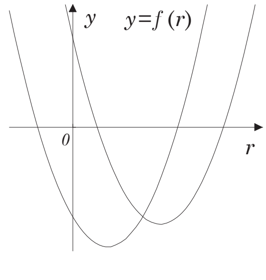
ここで，②$'$の左辺を$f(r)$とおき，$f(r)=0$の解を$r=r_1$，r_2　$(r_1\leqq r_2)$とおく。

(i)　$f(0)\leqq 0$　$(k^2-3\leqq 0)$のとき

$r\geqq 0$より，②$'$の解は$0\leqq r\leqq r_2$

③を考慮して，$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$のとき

$$0\leqq r\leqq\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)$$



(ii)　$f(0)\geqq 0$　$(k^2-3\geqq 0)$のとき

$r\geqq 0$より，②$'$の解は$k\geqq 0$のもとで$r_1\leqq r\leqq r_2$

③を考慮して，$\sqrt{3}\leqq k\leqq 2$のとき

$$\frac{1}{2}\left(k-\sqrt{12-3k^2}\right)\leqq r\leqq\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)$$

求める H の体積を V とし，以下のように V_1，V_2 を定めると，$V=V_1+V_2$

$$V_1=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)\right\}^2dk=\frac{2\pi}{4}\int_0^{\sqrt{3}}(k^2+12-3k^2)\,dk$$

$$=\pi\left[-\frac{k^3}{3}+6k\right]_0^{\sqrt{3}}=(-\sqrt{3}+6\sqrt{3})\pi=5\sqrt{3}\pi$$

$$V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\left\{\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}\left(k-\sqrt{12-3k^2}\right)\right\}^2\right)dk$$

$$=\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}k\sqrt{12-3k^2}\,dk=\sqrt{3}\pi\int_1^0(-t^2)\,dt=\frac{1}{3}\sqrt{3}\pi\quad\text{（}\sqrt{4-k^2}=t\text{ とおく）}$$

以上より，$V=5\sqrt{3}\pi+\dfrac{1}{3}\sqrt{3}\pi=\dfrac{16}{3}\sqrt{3}\pi$

［解 説］

本年度の 5 題中で最難問です。(1)は図形的に考えてもできますが，上の解では座標を用いてみました。計算はそんなに複雑ではありません。(2)では，平面 $z=k$ での切り口を考え，その断面積を求めて積分するという普通の方法をとりました。計算量はかなり多く，しかも無理不等式の同値変形など必要で，神経を消耗するものでした。ところが先日，月刊誌『大学への数学』4 月号を見ていたところ，(2)の体積を円筒分割（いわゆるバウムクーヘン型求積法）で求める解法が載っていました。この方法の方がはるかに簡明でした。反省です。

なお，この円筒分割による求積法は，一部の教科書（東京書籍版）には載っていますので，説明なしに使っても差し支えないと思えます。