$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

(1)　xy 平面上で，次の不等式を満たす点$(x,\ y)$の存在する領域を図示せよ。

$$100^{\log_{10}x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10}y-\log_{10}3)}\leqq 0$$

(2)　点$(x,\ y)$が(1)の領域を動くとき，

$$u=\sin\left(360°\times(x+y)\right)-\sqrt{3}\cos\left(360°\times(x+y)\right)$$

がとる値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

放物線$C : y=\dfrac{1}{2}x^2$上の原点以外の点 P における C の接線をl_1とし，P を通りl_1と直交する直線をl_2とする。また，l_2と C が再び交わる点を Q とし，Q における C の接線をl_3とする。さらに，l_1とl_3の交点を R とする。

(1)　点R$(x,\ y)$について，y を x の式で表せ。

(2)　PR≧PQ となる点 P の x 座標の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

正の整数の組$(a,\ b)$で, a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし, $a<b$ とする。

1　　問題のページへ

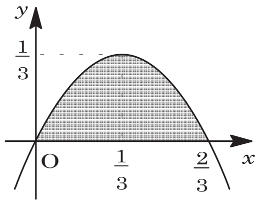
(1)　$100^{\log_{10}x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10}y-\log_{10}3)}\leqq 0$

$x>0$ かつ $y>0$ で,

$$10^{2\log_{10}x}+\frac{\log_{10}10^{-2x}}{\log_{10}10^3}+10^{\log_{10}\frac{y}{3}}\leqq 0$$

$$x^2-\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}\leqq 0$$

$$y\leqq -3x^2+2x=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$



求める点$(x,\ y)$の存在する領域は右図の網点部となる。ただし, x 軸以外の境界線は含む。

(2)　$u=\sin(360°\times(x+y))-\sqrt{3}\cos(360°\times(x+y))=2\sin(360°\times(x+y)-60°)$

$x+y=v$とおくと, $y=-x+v$ ……①となり, ①と(1)の領域が共有点をもつ v の範囲を求める。

①と(1)の領域の境界線$y=-3x^2+2x$ ……②が接するとき,

①②から, $-3x^2+2x=-x+v$, $3x^2-3x+v=0$

$$D/4=9-12v=0,\ \ v=\frac{3}{4}$$

(1)の図より, $0<v\leqq\frac{3}{4}$

このとき, $u=2\sin(360°\times v-60°)$から, $-60°<360°\times v-60°\leqq 210°$ なので,

$$2\sin(-60°)<u\leqq 2\sin 90°$$

よって, $-\sqrt{3}<u\leqq 2$

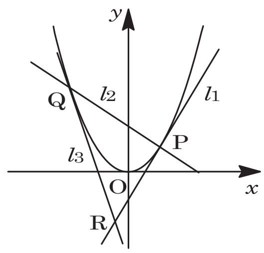
［解 説］

(1)の要点は$x=a^{\log_a x}$ だけです。この式は$x=\log_a a^x$ と対等な関係式です。ところが数Ⅱにおいては, 後者の関係式と比べると, 前者は冷遇されているとしか思えません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ ……①より，$y'=x$



$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$とすると，

$l_1：y=t(x-t)+\dfrac{1}{2}t^2=tx-\dfrac{1}{2}t^2$ ………②

$l_2：y=-\dfrac{1}{t}(x-t)+\dfrac{1}{2}t^2=-\dfrac{1}{t}x+1+\dfrac{1}{2}t^2$ ………③

①と③の交点は，

$\dfrac{1}{2}x^2=-\dfrac{1}{t}x+1+\dfrac{1}{2}t^2$，$x^2+\dfrac{2}{t}x-(t^2+2)=0$

$x=t$，$x=-t-\dfrac{2}{t}$

ここで$s=-t-\dfrac{2}{t}$とすると，②より，$l_3：y=sx-\dfrac{1}{2}s^2$ ………④

②④の交点がRより，$tx-\dfrac{1}{2}t^2=sx-\dfrac{1}{2}s^2$

$x=\dfrac{t^2-s^2}{2(t-s)}=\dfrac{t+s}{2}=\dfrac{1}{2}\left(t-t-\dfrac{2}{t}\right)=-\dfrac{1}{t}$

②より，$y=t\left(-\dfrac{1}{t}\right)-\dfrac{1}{2}t^2=-1-\dfrac{1}{2}t^2$

$\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{t},\ -1-\dfrac{1}{2}t^2\right)$となるので，$y=-1-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2=-\dfrac{1}{2x^2}-1$

(2)　$\mathrm{PR}^2=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}t^2+1+\dfrac{1}{2}t^2\right)^2=(t^2+1)^2\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)=\dfrac{(t^2+1)^3}{t^2}$

また，$\mathrm{PQ}^2=(t-s)^2+\left(\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}s^2\right)^2=\dfrac{1}{4}(t-s)^2\left\{4+(t+s)^2\right\}$

$=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2\left(4+\dfrac{4}{t^2}\right)=\dfrac{4(t^2+1)^3}{t^4}$

$\mathrm{PR}\geqq\mathrm{PQ}\ \Leftrightarrow\ \mathrm{PR}^2\geqq\mathrm{PQ}^2$より，$\dfrac{(t^2+1)^3}{t^2}\geqq\dfrac{4(t^2+1)^3}{t^4}$となる。

よって，$t^2\geqq4$から$t\leqq-2$，$2\leqq t$

すなわち，求める点Pのx座標の範囲は-2以下または2以上である。

［解　説］

よく見かける構図の問題です。別解もいろいろ考えられますが，ここでは普通に解いてみました。制限時間が30分ですので，焦って計算するほどではありません。

3

問題のページへ

a 以上 b 以下の整数の総和は $\dfrac{a+b}{2}(b-a+1)$ なので，条件より，

$$\frac{a+b}{2}(b-a+1)=500,\ \ (a+b)(b-a+1)=1000$$

$1\leqq a<b$ より，$2\leqq b-a+1<a+b$ ………(＊)

また，$(b-a+1)+(a+b)=2b+1$ で，和が奇数となることより，$b-a+1$ と $a+b$ の偶奇は一致しない。

以上より，$1000=2^3\cdot 5^3$ なので，(＊)を満たし 1000 を一方が偶数，他方が奇数の 2 つの数の積として表すと，

$$(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3),\ (5^2,\ 2^3\cdot 5),\ (5,\ 2^3\cdot 5^2)$$

(i)　$(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3)$ のとき

$b-a=7,\ a+b=125$ より，$(a,\ b)=(59,\ 66)$

(ii)　$(b-a+1,\ a+b)=(5^2,\ 2^3\cdot 5)$ のとき

$b-a=24,\ a+b=40$ より，$(a,\ b)=(8,\ 32)$

(iii)　$(b-a+1,\ a+b)=(5,\ 2^3\cdot 5^2)$ のとき

$b-a=4,\ a+b=200$ より，$(a,\ b)=(98,\ 102)$

［解 説］

1000 の正の約数は，全部で 16 個になりますが，一つ一つチェックしていくのはたいへんです。条件に適する候補を絞ることについては，$a+b$ と $b-a+1$ の和が奇数となることに注目してみました。