1

解答解説のページへ

曲線$C: y = e^x$と直線$l: y = ax + b\ (a > 0)$が 2 点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$と$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$で交わっている。ただし，$x_1 < x_2$とする。

(1)　$x_2 - x_1 = c$とおくとき，y_1とy_2をaとcを用いて表せ。

(2)　PとQの距離が1であるとする。曲線Cとx軸および2直線$x = x_1$，$x = x_2$とで囲まれた図形をx軸のまわりに1回転させて得られる回転体の体積を$V(a)$とおくとき，$\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{V(a)}{a}$を求めよ。

2　　解答解説のページへ

xy 平面上の点$(a,\ b)$は，a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。xy 平面において，3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし，必要ならば$\sqrt{3}$が無理数であることは証明なしで使ってよい。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

平面上に，点 O を中心とし点A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6を頂点とする正六角形がある。O を通りその平面上にある直線 l を考え，各A_kと l との距離をそれぞれd_kとする。このとき

$$D = {d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2 + {d_4}^2 + {d_5}^2 + {d_6}^2$$

は l によらず一定であることを示し，その値を求めよ。ただし，$OA_k = r$ とする。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

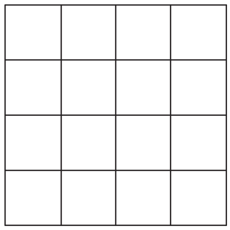
xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点$(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$を頂点とする正三角形である。また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点$(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$を頂点とする正三角形である。

このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

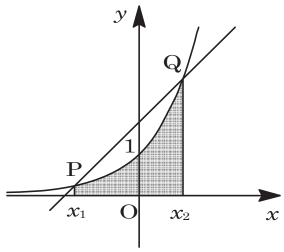
一辺の長さが 4 の正方形の紙の表を，図のように一辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し，A と B の 2 人に渡す。A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと，両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても，塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし，2 枚の紙を重ね合わせるときには，それぞれの紙を回転させてもよいが，紙の四隅は合わせることとする。



1

問題のページへ

(1)　$C: y=e^x$ が2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ を通るので，



$y_1=e^{x_1}$，$y_2=e^{x_2}$ より，

$$\frac{y_2}{y_1}=e^{x_2-x_1}=e^c\ \cdots\cdots\cdots①$$

$l: y=ax+b$ が2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ を通るので，

$y_1=ax_1+b$，$y_2=ax_2+b$ より，

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1)=ac\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(e^c-1)y_1=ac$，$y_1=\dfrac{ac}{e^c-1}$

①より，$y_2=\dfrac{ace^c}{e^c-1}$

(2)　条件より，$\mathrm{PQ}=1$ なので $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=1$

②より，$c^2+a^2c^2=1$，$c^2(1+a^2)=1\ \cdots\cdots\cdots③$

$a>0$，$c>0$ より，$a=\dfrac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ \cdots\cdots\cdots④$

ここで, (1)の結果から,

$$V(a)=\int_{x_1}^{x_2}\pi(e^x)^2dx=\frac{\pi}{2}(e^{2x_2}-e^{2x_1})=\frac{\pi}{2}({y_2}^2-{y_1}^2)$$

$$=\frac{\pi}{2}(y_2+y_1)(y_2-y_1)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{ac(e^c+1)}{e^c-1}\cdot ac=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^2c^2(e^c+1)}{e^c-1}$$

$$\frac{V(a)}{a}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{ac^2(e^c+1)}{e^c-1}=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1-c^2}\cdot\frac{c}{e^c-1}(e^c+1)\ \text{（④より）}$$

$a\to\infty$ のとき③より $c\to+0$ となり，$\dfrac{e^c-1}{c}\to 1$ から,

$$\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a}=\frac{\pi}{2}\cdot1\cdot1\cdot2=\pi$$

［解 説］

(1)の誘導に乗れば, (2)の極限値はスムーズに求まります。なお，もとの問題には，$b>0$ という条件がついていましたが，新聞にも出ていましたように，この条件は(2)では不必要のものでした。

$\boxed{2}$

問題のページへ

複素数平面を設定し，A(α)，B(β)，C(γ)とおくとき，△ABC が正三角形の条件は，以下，複号同順として，

$$\beta-\alpha=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\gamma-\alpha)$$

ここで，$\alpha=a_1+a_2i$，$\beta=b_1+b_2i$，$\gamma=c_1+c_2i$とし, 3 点 A, B, C がすべて有理点, すなわちa_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2がすべて有理数と仮定すると,

$$(b_1-a_1)+(b_2-a_2)i=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\{(c_1-a_1)+(c_2-a_2)i\}$$

$b_1-a_1=p$，$b_2-a_2=q$，$c_1-a_1=2s$，$c_2-a_2=2t$とおくと, p, q, s, t はすべて有理数となり,

$$p+qi=(1\pm\sqrt{3}i)(s+ti)=(s\mp\sqrt{3}t)+(t\pm\sqrt{3}s)i$$

よって，$p=s\mp\sqrt{3}t$，$q=t\pm\sqrt{3}s$

$\sqrt{3}$は無理数なので，$p=s$かつ$t=0$，$q=t$かつ$s=0$

まとめると，$p=q=s=t=0$より，$a_1=b_1=c_1$，$a_2=b_2=c_2$となるので，3 点 A, B, C は一致する。すなわち，△ABC は存在しない。

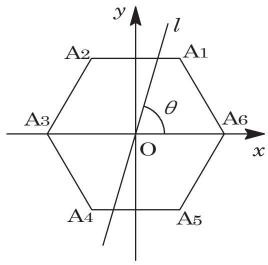
以上より, 3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しない。

［解 説］

△ABC の面積に注目して，題意を証明することもできます。このような解法を利用する類題が, 92 年の東大・理で出題されています。

3

問題のページへ



Oを原点とし，$1\leqq k\leqq 6$で，一般性を失うことなく$\mathrm{A}_k\left(r\cos\dfrac{k\pi}{3},\ r\sin\dfrac{k\pi}{3}\right)$とおくことができる。

またlの方向ベクトルを$(\cos\theta,\ \sin\theta)$とすると，法線ベクトルは$(-\sin\theta,\ \cos\theta)$とおけるので，

$$l: -x\sin\theta+y\cos\theta=0$$

すると，点と直線との距離の公式を用いて，

$$d_k=\frac{\left|-r\cos\dfrac{k\pi}{3}\sin\theta+r\sin\dfrac{k\pi}{3}\cos\theta\right|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=r\left|\sin\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right)\right|$$

$$D=\sum_{k=1}^{6}{d_k}^2=r^2\sum_{k=1}^{6}\sin^2\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right)=\frac{r^2}{2}\sum_{k=1}^{6}\left\{1-\cos2\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right)\right\}$$

$$=3r^2-\frac{r^2}{2}\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}-2\theta\right)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}-2\theta\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\theta\right)+\cos(2\pi-2\theta)$

$$+\cos\left(\frac{8\pi}{3}-2\theta\right)+\cos\left(\frac{10\pi}{3}-2\theta\right)+\cos(4\pi-2\theta)$$

$$=2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\theta\right)+\cos(2\pi-2\theta)\right\}$$

$$=2\left\{2\cos(\pi-2\theta)\cos\frac{\pi}{3}+\cos(-2\theta)\right\}$$

$$=2(-\cos2\theta+\cos2\theta)$$

$$=0$$

以上より，$D=3r^2$

［解 説］

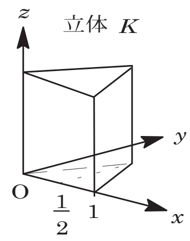
正六角形と直線 l の位置関係は相対的なので，どちらか一方を「よい位置」に配置することができます。上の解は前者を「よい位置」に配置したものです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

立体 K を表す不等式は,

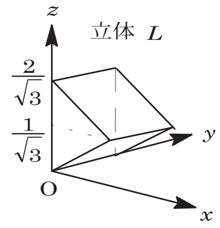
$$y \geqq 0,\ \ y \leqq \sqrt{3}x,\ \ y \leqq -\sqrt{3}(x-1) \cdots\cdots\cdots ①$$



立体 L を表す不等式は,

$$x \geqq 0,\ \ z \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ \ z \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ②$$

立体 K と L の共通部分を平面 $x = k$ で切った断面で考える。また, その面積を $S(k)$ とおく。



②より, $k \geqq 0,\ \ \dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq z \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}k + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ③$

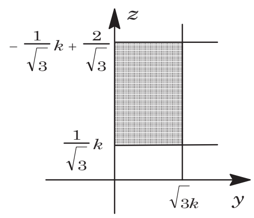
断面が存在する条件は, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}k + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より, $k \leqq 1$ となるので, $0 \leqq k \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$

①より, $y \geqq 0,\ \ y \leqq \sqrt{3}k,\ \ y \leqq -\sqrt{3}(k-1) \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤より, $\sqrt{3}k \leqq -\sqrt{3}(k-1) \iff 0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{3}k \geqq -\sqrt{3}(k-1) \iff \dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$

(i)　$0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

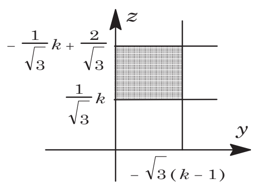
③⑤より $x = k$ で切った断面は右図のようになる。



$$S(k) = \sqrt{3}k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$
$$= -2k(k-1)$$

(ii)　$\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

③⑤より $x = k$ で切った断面は右図のようになる。



$$S(k) = -\sqrt{3}(k-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$
$$= 2(k-1)^2$$

以上より, 立体 K と L の共通部分の体積 V は,

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} -2k(k-1)\,dk + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2(k-1)^2\,dk = \left[-\frac{2}{3}k^3 + k^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\left[(k-1)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

［解 説］

2 つの立体の共通部分の体積を求めるという以前からの頻出題の一つです。現行の課程では出題されなくなるという噂もありましたが, そうではありませんでした。

5

問題のページへ

2 枚の紙を表を上にして重ね合わせたとき，16 個のマス目のうち重なるマス目には同じ番号を書いてみると，右図のようになる。これより，どの番号も 4 つのマス目に書かれていることがわかる。

2	3	4	2
4	1	1	3
3	1	1	4
2	4	3	2

ここで，A が塗りつぶしたマス目の状態について場合分けをして，A と B が塗りつぶしたマス目がどれも重ならない確率を求める。

(i)　A が同じ番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_1$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 12 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_{12}C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_1=\frac{1}{20}\times\frac{11}{20}\times 4=\frac{11}{100}$$

(ii)　A が異なる番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_2$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 8 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_8C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_2=\frac{2}{15}\times\frac{7}{30}\times 6=\frac{14}{75}$$

以上より，求める確率は，$\dfrac{11}{100}+\dfrac{14}{75}=\dfrac{89}{300}$

［解　説］

難問風の問題設定にドキッとします。しかし，まん中の 4 つは同じというように考えていけば，結論までのプロセスが次第に見えてきます。