1

解答解説のページへ

座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$，$\mathrm{Q}(1,\ 0)$ をとる。また，t を実数とし，放物線 $y=(x-t)^2$ を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C が P を通るときの t の値を求めよ。

(2) C が直線 PQ に接するときの t の値と接点の座標を求めよ。

(3) 線分 PQ と C の共有点の個数が t によりどのように変化するか記述せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間において四面体 OABC を考える。$\triangle$ABC の重心をO'，$\triangle$OBC の重心をA'，$\triangle$OCA の重心をB'，$\triangle$OAB の重心をC'とする。次の問いに答えよ。

(1) 2 つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$は平行であることを示せ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$と$\left|\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}\right|$の比を求めよ。

(3) $\triangle$OAB と$\triangle \mathrm{O'A'B'}$は相似であることを示せ。

(4) A が $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{Q}(0,\ 2,\ 0)$ を結ぶ線分の中点，B が Q と $\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を結ぶ線分の中点，C が R と P を結ぶ線分の中点であるとき，四面体 OABC の体積 V と四面体$\mathrm{O'A'B'C'}$の体積V'を求めよ。

3

解答解説のページへ

$m>0$ とする。座標平面上の点 P に対して, P を通る傾き m の直線と y 軸の交点を R とし, 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ となるように定める。次の問いに答えよ。

(1) P の座標を $(a,\ b)$ とするとき, Q の座標を m, a, b を用いて表せ。

(2) 点 P が放物線 $y=x^2-x$ 上を動くとき, 対応する点 Q の軌跡を C とする。C の方程式を $y=f(x)$ とするとき, $f(x)$ を求めよ。

(3) (2)の $f(x)$ に対し, $I(m)=\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$ とする。m を $m>0$ の範囲で変化させるとき, $I(m)$ を最小にする m の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

1 枚の硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回投げた時点で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) P_2 を求めよ。

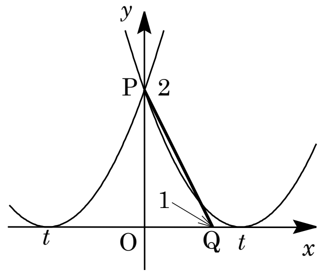
(2) P_3 を求めよ。

(3) P_4 を求めよ。

(4) $P_5<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

1

問題のページへ



(1)　放物線 $C: y=(x-t)^2$ ……①が $\mathrm{P}(0,\ 2)$ を通るとき，

$2=t^2$ から $t=\pm\sqrt{2}$ である。

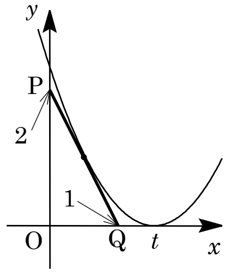
(2)　放物線①と直線 $\mathrm{PQ}: y=-2x+2$ ……②を連立すると，$(x-t)^2=-2x+2$ となり，

$$x^2-2(t-1)x+t^2-2=0 \text{………③}$$

C と PQ が接するとき，

$$D/4=(t-1)^2-(t^2-2)=-2t+3=0$$

よって，$t=\dfrac{3}{2}$ である。



このとき，③から $x=t-1=\dfrac{1}{2}$，②から $y=1$ となり，接点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ である。

(3)　線分 PQ と C の共有点の個数は，(1)(2)の図を参考にして，

$t>\dfrac{3}{2}$ のとき 0 個，$t=\dfrac{3}{2}$ のとき 1 個，$\sqrt{2}\leqq t<\dfrac{3}{2}$ のとき 2 個

$-\sqrt{2}\leqq t<\sqrt{2}$ のとき 1 個，$t<-\sqrt{2}$ のとき 0 個

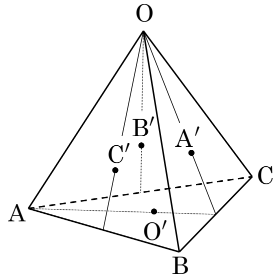
［解 説］

放物線と直線の関係を題材にした基本的な問題です。(1)(2)の設問から，(3)の結論は図から判断しています。

２

問題のページへ

(1)　四面体 OABC において，△ABC, △OBC，△OCA, △OABの重心を，それぞれO'，A'，B'，C'とする。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),\ \overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c}),\ \overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=-\frac{1}{3}\vec{a}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$は平行である。

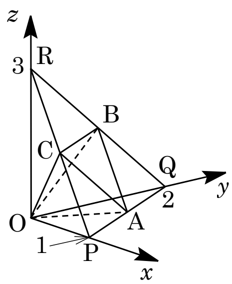
(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|:|\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}|=3:1$である。

(3)　(1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=-\frac{1}{3}\vec{b}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|:|\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}|=3:1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|:|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}|=3:1$となり，3 組の辺の長さの比が等しいので，△OABと△$\mathrm{O'A'B'}$は相似である。

(4)　P(1, 0, 0)，Q(0, 2, 0)，R(0, 0, 3)に対して，点 A, B, C は，それぞれ線分 PQ, QR, RP の中点である。



ここで，四面体 OPQR, 四面体 OABC, 四面体$\mathrm{O'A'B'C'}$の体積を，それぞれV_0, V, V'とすると，

$$V_0=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\right)\cdot3=1$$

$\triangle\mathrm{ABC}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{4}\triangle\mathrm{PQR}$より，

$$V=\frac{1}{4}V_0=\frac{1}{4}$$

(3)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{O'C'}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C'A'}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$となる。

すると，四面体 OABC と四面体$\mathrm{O'A'B'C'}$は相似で，その比は$3:1$より，

$$V'=\left(\frac{1}{3}\right)^3V=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{108}$$

［解 説］

空間ベクトルの四面体への応用問題で，基本的な内容です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通り傾き $m\,(m>0)$ の直線の方程式は,

$$y-b=m(x-a),\quad y=mx-ma+b$$

この直線と y 軸の交点 R は $\mathrm{R}(0,\ -ma+b)$ となる。

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+m(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}})=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OR}}+m\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$=(1-m)(0,\ -ma+b)+m(a,\ b)=(ma,\ m^2a-ma+b)$$

よって, $\mathrm{Q}(ma,\ m^2a-ma+b)$ となる。

(2)　点 P が放物線 $y=x^2-x$ 上を動くとき, $b=a^2-a$ ………①

ここで, $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと, $x=ma$ ……②, $y=m^2a-ma+b$ ……③

①③より, $y=a^2+(m^2-m-1)a$ となり, ②から $a=\dfrac{x}{m}$ を代入すると,

$$y=\left(\frac{x}{m}\right)^2+(m^2-m-1)\cdot\frac{x}{m},\quad y=\frac{x^2}{m^2}+\left(m-1-\frac{1}{m}\right)x$$

点 Q の軌跡の方程式を $y=f(x)$ とすると, $f(x)=\dfrac{x^2}{m^2}+\left(m-1-\dfrac{1}{m}\right)x$ である。

(3)　$I(m)=\displaystyle\int_0^m f(x)dx=\int_0^m\left\{\frac{x^2}{m^2}+\left(m-1-\frac{1}{m}\right)x\right\}dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3m^2}+\left(m-1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2}\right]_0^m=\frac{m}{3}+\left(m-1-\frac{1}{m}\right)\frac{m^2}{2}=\frac{m^3}{2}-\frac{m^2}{2}-\frac{m}{6}$$

すると, $I'(m)=\dfrac{3}{2}m^2-m-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}(9m^2-6m-1)$

$I'(m)=0$ の正の解は $m=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ となり, $I(m)$ の増減は右表のようになる。

m	0	$\cdots$	$\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$
$I'(m)$		$-$	0	$+$
$I(m)$		↘		↗

これより, $I(m)$ を最小にする m の値は $m=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ である。

［解 説］

軌跡と微分法の融合問題です。ただ, どちらも基本の確認のレベルです。

4

問題のページへ

(1)　硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う。
このとき，2 回投げた時点で終了するのは，表→表の場合で，その確率 P_2 は，

$$P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(2)　3 回投げた時点で終了するのは，裏→表→表の場合で，その確率 P_3 は，

$$P_3=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

(3)　4 回投げた時点で終了するのは，任意→裏→表→表の場合で，その確率 P_4 は，

$$P_4=1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

(4)　5 回投げた時点で終了するのは，任意→任意→裏→表→表の場合から，表→表→裏→表→表の場合を除けばよいので，その確率 P_5 は，

$$P_5=1^2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{3}{32}$$

すると，$P_5<\frac{1}{2}$ が成り立つ。

［解　説］

確率の基本問題です。「ひっかけが何かあるのでは」と疑ってしまいますが……。