1

解答解説のページへ

$a>0$，$b>0$ とする。xy 平面において，原点を通る傾き正の直線が，直線 $y=-a$ と交わる点を P とし，直線 $x=b$ と交わる点を Q とする。P の x 座標を p とし，線分 PQ の長さを L とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　L^2 を a, b, p を用いて表せ。

(2)　a, b を定数とし，p を $p<0$ の範囲で変化させるとき，L^2 を最小にする p の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた p の値を p_0 とする。また，c を $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ を満たす正の実数とする。$p=p_0$ のときの L^2 の値を c を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ とおく。$f(x)$，$g(x)$ の不定積分を $I=\int f(x)dx$，$J=\int g(x)dx$ とおく。k を自然数とし，$(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ において，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および，2 直線 $x=(k-1)\pi$，$x=k\pi$ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を S_k とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$I=J+F(x)+C_1$，$J=-I+G(x)+C_2$ を満たす関数 $F(x)$，$G(x)$ を求めよ。ただし，C_1，C_2 は積分定数である。

(2)　$I,\ J$ を求めよ。

(3)　S_k を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 枚の硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ。

(2) P_{n+1} を P_n および P_{n-1} を用いて表せ。ただし，$n \geqq 3$ とする。

(3) $n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{P_n}{2} \leqq P_{n+1} \leqq P_n$ が成り立つことを示せ。

4

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間内に点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ が与えられている。線分 OC を 1 つの対角線とし，線分 AB を 1 辺とする立方体を直線 OC のまわりに回転して得られる回転体 K の体積を求めたい。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ p)$ $(0 < p \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 H の座標と線分 PH の長さを求めよ。

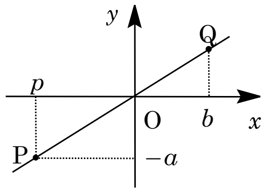
(2) 点 $\mathrm{Q}(q,\ 0,\ 1)$ $(0 \leqq q \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 I の座標と線分 QI の長さを求めよ。

(3) 原点 O から点 C 方向へ線分 OC 上を距離 $u\,(0 \leqq u \leqq \sqrt{3})$ だけ進んだ点を U とする。点 U を通り直線 OC に垂直な平面で K を切ったときの切り口の円の半径 r を u の関数として表せ。

(4) K の体積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　原点と点 $\mathrm{P}(p,\ -a)$ を通る傾き正の直線は，その傾きが $-\dfrac{a}{p}>0$ から，その方程式は $y=-\dfrac{a}{p}x$ となる。

すると，この直線と直線 $x=b$ との交点は，$\mathrm{Q}\left(b,\ -\dfrac{ab}{p}\right)$ となり，また $a>0$，$b>0$ から，$p<0$ である。

このとき，PQ の長さを L とおくと，$L^2=(b-p)^2+\left(-\dfrac{ab}{p}+a\right)^2$ から，

$$L^2=(b-p)^2+\left(-\frac{a}{p}\right)^2(b-p)^2=\left(1+\frac{a^2}{p^2}\right)(b-p)^2$$

(2)　$$\frac{dL^2}{dp}=-2\cdot\frac{a^2}{p^3}(b-p)^2-\left(1+\frac{a^2}{p^2}\right)\cdot 2(b-p)=-2(b-p)\left\{\frac{a^2}{p^3}(b-p)+1+\frac{a^2}{p^2}\right\}$$

$$=-\frac{2(b-p)(p^3+a^2b)}{p^3}$$

これより，L^2 の値の増減は右表のようになり，$p=-\sqrt[3]{a^2b}$ のとき最小になる。

p	$\cdots$	$-\sqrt[3]{a^2b}$	$\cdots$	0
$\dfrac{dL^2}{dp}$	$-$	0	$+$	
L^2	↘		↗	

(3)　$p_0=-\sqrt[3]{a^2b}=-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ となり，このとき，

$$L^2=\left(1+\frac{a^2}{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\right)\left(b+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(1+a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot b^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$=\left(b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)\left(b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)^2=\left(b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

ここで，$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ より，$L^2=\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3=c^2$ となる。

［解　説］

微分と増減についての標準的な問題です。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ に対し，$I=\int f(x)dx$，$J=\int g(x)dx$

$$I-J=\int e^{-x}(\sin x-\cos x)dx=-e^{-x}\sin x+C_1\cdots\cdots\cdots①$$

$$I+J=\int e^{-x}(\sin x+\cos x)dx=-e^{-x}\cos x+C_2\cdots\cdots\cdots②$$

すると，条件より，$F(x)=-e^{-x}\sin x$，$G(x)=-e^{-x}\cos x$ となる。

(2)　$C_3=\frac{1}{2}(C_1+C_2)$，$C_4=\frac{1}{2}(-C_1+C_2)$ とおき，①②の両辺の和と差をとると，

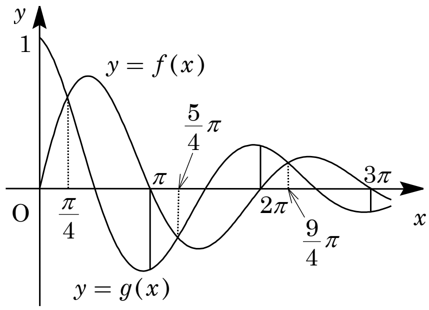
$$I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C_3,\quad J=-\frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x+\cos x)+C_4$$

(3)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立すると，$e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x=0$ となり，

$$\sin x-\cos x=0,\quad \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$x\geqq 0$ における共有点は，k を自然数として，

$$x-\frac{\pi}{4}=(k-1)\pi,\quad x=(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}$$



$(k-1)\pi\leqq x\leqq k\pi$ における 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の位置関係は，$x=(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}$ において変化するだけなので，この 2 曲線にはさまれた 2 つの部分の面積の和 S_k は，

$$S_k=\left|\int_{(k-1)\pi}^{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi}\{f(x)-g(x)\}dx\right|$$

$$=\left|\Big[J-I\Big]_{(k-1)\pi}^{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}+\Big[I-J\Big]_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi}\right|$$

$$=\left|\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{(k-1)\pi}^{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}-\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi}\right|$$

$$=\left|e^{-(k-1)\pi-\frac{\pi}{4}x}\sin\left((k-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)+e^{-(k-1)\pi-\frac{\pi}{4}x}\sin\left((k-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$=2\left|e^{\frac{3}{4}\pi-k\pi}\cdot(-1)^{k-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi-k\pi}$$

(4)　(3)より，S_k は公比 $e^{-\pi}$ $(0<e^{-\pi}<1)$ の等比数列となるので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}{e^{\pi}-1}$$

［解　説］

面積と極限についての有名問題です。前半は，普通に部分積分を適用しても構いません。なお，(3)では，(2)の結果を直接的には利用しませんでした。

3

問題のページへ

(1)　硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う。

このとき，2 回投げた時点で終了するのは，表→表の場合で，その確率 P_2 は，

$$P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

3 回投げた時点で終了するのは，裏→表→表の場合で，その確率 P_3 は，

$$P_3=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

4 回投げた時点で終了するのは，任意→裏→表→表の場合で，その確率 P_4 は，

$$P_4=1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

(2)　ちょうど $n+1$ 回の試行で終了する場合は，$n\geqq 3$ のとき，

(i)　1 回目が裏のとき　残りの n 回の試行で終了する。

(ii)　1 回目が表のとき　2 回目が裏で，残りの $n-1$ 回の試行で終了する。

(i) (ii)より，ちょうど $n+1$ 回で終了する確率 P_{n+1} は，

$$P_{n+1}=\frac{1}{2}\times P_n+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times P_{n-1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$(*)$より，$n\geqq 3$ のとき，$P_{n+1}-\dfrac{P_n}{2}=\dfrac{1}{4}P_{n-1}\geqq 0$ となり，$P_{n+1}\geqq\dfrac{P_n}{2}$

$$P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{2}P_{n-1}\right)\leqq 0$$

また，(1)から，$\dfrac{P_2}{2}\leqq P_3\leqq P_2$ が成り立っているので，$n\geqq 2$ のとき，

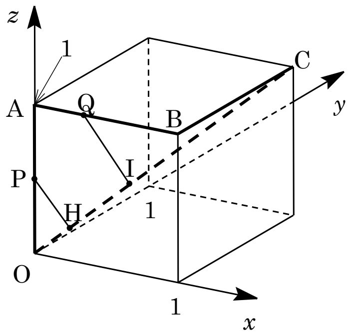
$$\frac{P_n}{2}\leqq P_{n+1}\leqq P_n$$

［解　説］

確率と漸化式の基本的な問題です。

4

問題のページへ



(1) 右図の 1 辺の長さが 1 の立方体について，辺 OA 上の点 $P(0,\ 0,\ p)\ (0<p\leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点を H とする。

$\overrightarrow{OC}=(1,\ 1,\ 1)$ より，t を実数として，$H(t,\ t,\ t)$ とおくことができるので，$\overrightarrow{PH}=(t,\ t,\ t-p)$ となり，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ から，

$$t+t+(t-p)=0,\ t=\frac{p}{3}$$

これより，$H\left(\frac{p}{3},\ \frac{p}{3},\ \frac{p}{3}\right)$ となり，

$$PH=\sqrt{OP^2-OH^2}=\sqrt{p^2-\left(\frac{p}{3}\right)^2\cdot 3}=\sqrt{\frac{2}{3}p^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}p$$

(2) 辺 AB 上の点 $Q(q,\ 0,\ 1)\ (0\leqq q\leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点を I とする。s を実数として，$I(s,\ s,\ s)$ とおくことができるので，$\overrightarrow{QI}=(s-q,\ s,\ s-1)$ となり，$\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ から，

$$(s-q)+s+(s-1)=0,\ s=\frac{q+1}{3}$$

これより，$I\left(\frac{q+1}{3},\ \frac{q+1}{3},\ \frac{q+1}{3}\right)$ となり，

$$QI=\sqrt{OQ^2-OI^2}=\sqrt{(1+q^2)-\left(\frac{q+1}{3}\right)^2\cdot 3}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{q^2-q+1}$$

(3) (1)において $p=1$ のとき $H\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ より，$OH=\frac{\sqrt{3}}{3}$ となり，(2)において $q=1$ のとき $I\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ より，$OI=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ となる。

ここで，線分 OC 上に点 U を $OU=u\ (0\leqq u\leqq\sqrt{3})$ となるようにとるとき，点 U を通り直線 OC に垂直な平面で回転体 K を切ったときの切り口の円の半径 r は，

(i) $0\leqq u\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$0<p\leqq 1$ で，$u=OH=\sqrt{\frac{p^2}{3}}=\frac{p}{\sqrt{3}}$ となり，

$$r=PH=\frac{\sqrt{6}}{3}p=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{3}u=\sqrt{2}u$$

なお，$p=0$ のときも成り立っている。

(ii) $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき　$0\leqq q\leqq 1$ で，$u=OI=\sqrt{\frac{(q+1)^2}{3}}=\frac{q+1}{\sqrt{3}}$ となり，

$$r=QI=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{q^2-q+1}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{(\sqrt{3}u-1)^2-(\sqrt{3}u-1)+1}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{3u^2-3\sqrt{3}u+3}=\sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)}$$

(iii) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3} \leqq u \leqq \sqrt{3}$ のとき

対称性から，(i)の場合の u を $\sqrt{3}-u$ に置き換えて，$r=\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-u)$ となる。

(4) K の体積を V とすると，(i)の場合と(iii)の場合の回転体の体積は同じなので，

$$V = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \pi(\sqrt{2}u)^2 du + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \pi\left(\sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)}\right)^2 du$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} u^2 du + 2\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} (u^2-\sqrt{3}u+1)\,du$$

$$= 4\pi\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + 2\pi\left[\frac{u^3}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}u^2+u\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{9} + 2\pi\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{27}\sqrt{3}\pi + \frac{5}{27}\sqrt{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

［解　説］

立方体を対角線のまわりに回転させてできる立体の体積を求める有名問題です。本問では，折れ線 OA, AB, BC を OC のまわりに回転させて K の体積を求めるという詳しい誘導がついています。なお，同じ問題が 2010 年に京大・文系で出題されています。誘導なしでしたが。