1

解答解説のページへ

x, y を整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) x^2+y^2 が 3 で割り切れるとき，x と y はともに 3 の倍数であることを示せ。

(2) x^2+y^2 が 27 で割り切れるとき，x と y はともに 9 の倍数であることを示せ。

(3) n を正の整数とする。x^2+y^2 が 3^{2n-1} で割り切れるとき，x と y はともに 3^n の倍数であることを示せ。

2

解答解説のページへ

さいころの 6 つの面の中から 2 面を選んで赤色に塗る。残った 4 面の中から 2 面を選んで黒色に塗る。最後に残った 2 面は白色に塗る。なお，色を塗っても，さいころの目は判別できるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　上のような各面への色の塗り分け方は全部で何通りあるか。

(2)　赤い面が向かい合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(3)　赤い面が隣り合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(4)　同じ色の面がすべて隣り合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(5)　同じ色の面がすべて向かい合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

3

解答解説のページへ

a, b は実数で，$b>0$ とする。放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ の 2 つの交点を P，Q とおく。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さを，a と b を用いて表せ。

(2) 直線 $y=ax+b$ が点 $\left(1,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を通るときの，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

四面体 OABC は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=9$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=14$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=5$ を満たすものとする。また，直線 AB 上の点 D を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直になるようにとり，実数 m を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように定める。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　m の値を求めよ。

(2)　$m<s<1$ を満たす実数 s に対し，辺 AB を $(1-s):s$ に内分する点 P をとる。さらに，直線 AC 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直になるようにとり，実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$ となるように定める。t を s を用いて表せ。

(3)　(2)の t に対し，$0<t<1$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　以下，mod 3 で記すと，$x\equiv 0$ のとき $x^2\equiv 0$，$x\equiv 1$ のとき $x^2\equiv 1$，$x\equiv 2$ のとき $x^2\equiv 4\equiv 1$ となる。

ここで，x と y を 3 で割った余りと，x^2+y^2 を 3 で割った余りを対応させると，右表のようになる。

x＼y	0	1	2
0	0	1	1
1	1	2	2
2	1	2	2

これより，x^2+y^2 が 3 で割り切れるとき，x と y はともに 3 の倍数である。

(2)　x^2+y^2 が 27 で割り切れる，すなわち 3 で割り切れるので，(1)から，x_1，y_1 を整数として，$x=3x_1$，$y=3y_1$ ……①と表される。

このとき，$x^2+y^2=9({x_1}^2+{y_1}^2)$ となり，x^2+y^2 が 27 で割り切れることから，${x_1}^2+{y_1}^2$ は 3 で割り切れる。すると，(1)から，x_2，y_2 を整数として，

$$x_1=3x_2,\ y_1=3y_2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②から，$x=9x_2$，$y=9y_2$ となり，x と y はともに 9 の倍数である。

(3)　正の整数 n に対し，x^2+y^2 が 3^{2n-1} で割り切れるとき，x と y はともに 3^n の倍数であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

x^2+y^2 が $3^{2\times1-1}$ で割り切れるとき，(1)から，x と y はともに 3^1 の倍数である。

(ii)　$n=k$ のとき

x^2+y^2 が 3^{2k-1} で割り切れるとき，x と y はともに 3^k の倍数と仮定する。

ここで，x^2+y^2 が 3^{2k+1} で割り切れる，すなわち 3^{2k-1} で割り切れるので 仮定から，x_k，y_k を整数として，$x=3^kx_k$，$y=3^ky_k$ ……③と表される。

このとき，$x^2+y^2=3^{2k}({x_k}^2+{y_k}^2)$ となり，x^2+y^2 が 3^{2k+1} で割り切れることから，${x_k}^2+{y_k}^2$ は 3 で割り切れる。すると，(1)から，x_{k+1}，y_{k+1} を整数として，

$$x_k=3x_{k+1},\ y_k=3y_{k+1} \cdots\cdots\cdots ④$$

③④から，$x=3^{k+1}x_{k+1}$，$y=3^{k+1}y_{k+1}$ となり，x と y はともに 3^{k+1} の倍数である。

(i)(ii)より，x^2+y^2 が 3^{2n-1} で割り切れるとき，x と y はともに 3^n の倍数である。

［解 説］

標準的な整数問題です。(2)のプロセスから，数学的帰納法を利用して(3)の命題を証明するという考え方が得られるのではないかと思われます。

2

問題のページへ

(1)　色を塗っても違いが区別できる 6 つの面をもつさいころを，赤色 2 面，黒色 2 面，白色 2 面で塗り分ける方法は，

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=90 \text{（通り）}$$

(2)　赤い面が向かい合う塗り分け方は，まず赤色を$(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$の目のいずれか 1 組の面に塗り，残りの 4 面を黒色 2 面，白色 2 面で塗り分ける。その方法は，それぞれ${}_4C_2\times{}_2C_2$通りずつなので，

$$3\times{}_4C_2\times{}_2C_2=18 \text{（通り）}$$

(3)　赤い面が隣り合うような，各面への色の塗り分け方は，(1)(2)から，

$$90-18=72 \text{（通り）}$$

(4)　まず，赤い面のみ向かい合う塗り分け方は，(2)から赤面の塗り方が 3 通りで，このとき残りの黒色 2 面と白色 2 面の隣り合う塗り方が，それぞれ 4 通りずつなので，$3\times4=12$通りとなる。すると，同じ色の面が 1 組だけ向かい合う塗り分け方は，$3\times12=36$通りである。

また，同じ色の面がすべて向かい合うのは，赤色，黒色，白色を$(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$の目の面に塗る場合なので，その対応を考えて$3!=6$通りとなる。

よって，同じ色の面がすべて隣り合うような，各面への色の塗り分け方は，

$$90-36-6=48 \text{（通り）}$$

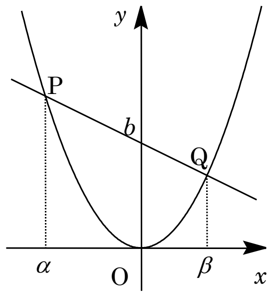
(5)　同じ色の面がすべて向かい合うような，各面への色の塗り分け方は，(4)から 6 通りである。

［解　説］

さいころの面の塗り分けについての問題ですが，本問では「色を塗っても，さいころの目は判別できるものとする」という題意から複雑さは軽減しています。なお，前半の(1)→(2)→(3)の流れをもとにすると，残りの 2 つの設問は(5)→(4)という考え方の流れが生じてしまい，そのように解答例をかいています。

3

問題のページへ



(1)　放物線 $y = x^2$ ……①と直線 $y = ax + b\ (b > 0)$ ……②を連立すると，$x^2 - ax - b = 0$ ……③となる。

③の実数解を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，

$$\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2},\ \beta = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

すると，①と②の交点を $\mathrm{P}(\alpha,\ a\alpha + b)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ a\beta + b)$ とおくことができるので，

$$\mathrm{PQ}^2 = (\beta - \alpha)^2 + (a\beta + b - a\alpha - b)^2 = (a^2 + 1)(\beta - \alpha)^2 = (a^2 + 1)(a^2 + 4b)$$

よって，$\mathrm{PQ} = \sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b)}$ となる。

(2)　直線②が点 $\left(1,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を通るので $\dfrac{5}{4} = a + b$ となり，$b = -a + \dfrac{5}{4}$ ……④から，

$$\mathrm{PQ}^2 = (a^2 + 1)(a^2 - 4a + 5) = a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 5$$

そこで，$f(a) = a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 5$ とおくと，

$$f'(a) = 4a^3 - 12a^2 + 12a - 4 = 4(a - 1)^3$$

ここで，④より $b = -a + \dfrac{5}{4} > 0$ から，$a < \dfrac{5}{4}$ となり，この範囲で $f(a)$ の増減を調べると右表のとおりである。

a	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{4}$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	
$f(a)$	↘	4	↗	

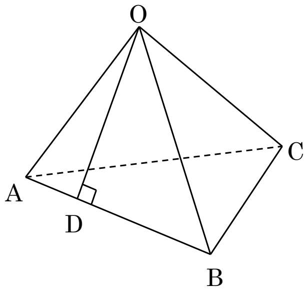
すると，$\mathrm{PQ} = \sqrt{f(a)}$ から，線分 PQ の長さの最小値は $\sqrt{4} = 2$ である。

［解　説］

微分と増減についての超基本題です。計算も平易です。

4

問題のページへ



(1)　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，条件より，$\vec{a}\cdot\vec{a}=9$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$\vec{b}\cdot\vec{b}=14$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=m\vec{a}+(1-m)\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から，

$$\left(m\vec{a}+(1-m)\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$3m-9m+14(1-m)-3(1-m)=0$$

まとめると，$-17m+11=0$ から，$m=\dfrac{11}{17}$ となる。

(2)　$\dfrac{11}{17}<s<1$ として $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-s)\vec{a}-(1-s)\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ から，$\left(s\vec{a}+(1-s)\vec{b}\right)\cdot\left((t-s)\vec{a}-(1-s)\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right)=0$

$$\{9s+3(1-s)\}(t-s)-\{3s+14(1-s)\}(1-s)+\{s+3(1-s)\}(1-t)=0$$

まとめると，$8st-17s^2+20s-11=0$ となり，$t=\dfrac{17s^2-20s+11}{8s}$ である。

(3)　$\dfrac{11}{17}<s<1$ のとき，$17s^2-20s+11=17\left(s-\dfrac{10}{17}\right)^2+\dfrac{87}{17}>0$ となり，

$$\frac{17s^2-20s+11}{8s}-1=\frac{17s^2-28s+11}{8s}=\frac{(s-1)(17s-11)}{8s}<0$$

よって，$0<t<1$ が成り立つ。

［解 説］

空間ベクトルについて，内積計算だけの問題です。最初，解く前の準備として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の大きさを求めておきましたが，必要ありませんでした。