1　　解答解説のページへ

r は $0<r<1$ を満たす実数とする。次の問いに答えよ。ただし，$0^r=0$ と定める。

(1)　$a \geqq 0$ のとき，$x \geqq 0$ について，不等式 $(a+x)^r \leqq a^r + x^r$ を示せ。

(2)　$a_k \geqq 0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき，不等式 $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^r \leqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^r$ を示せ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 n に対し，$C_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ とおくとき，$C_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}C_n$ を示せ。ただし，$\cos^0 x=1$ と定める。

(2)　座標空間内で，連立不等式

$$x^2+y^2\leqq 1,\ z+2x^2-x^4\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$$

の表す領域の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，第 1 象限内の曲線 $C: x^r+y^r=1$ を考える。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとり，l を点 P における C の接線とし，l が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ A, B とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A と点 B の座標を p, q, r を用いて表せ。

(2)　点 P を曲線 C 上のどこにとっても線分 AB の長さが同じになるような r の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を正の整数とし，m を 0 以上 10 以下の整数とする。袋 1 から袋 n まで，外見では区別のつかない袋が n 袋ある。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，袋 k の中には，赤球が k 個，白球が $n-k$ 個入っているものとする。袋を 1 つ選んだ後，その選んだ袋について次の操作を 10 回繰り返して行うことにする。

（操作）袋から球を 1 つ取り出し，色を確認してその袋に戻す。

赤球をちょうど m 回取り出す確率を $P_{m,n}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $P_{m,n}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_{10,n}$ を求めよ。

(3) $m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_{m,n}=\lim_{n\to\infty} P_{m+1,n}$ を示せ。

1

問題のページへ

(1)　$0<r<1$，$a \geqq 0$，$x \geqq 0$ のとき，$f(x)=a^r+x^r-(a+x)^r$ とおくと，

(i)　$a=0$ のとき　$f(x)=x^r-x^r=0$

(ii)　$a>0$ のとき　$f(0)=a^r-a^r=0$ となり，$x>0$ において，

$$f'(x)=rx^{r-1}-r(a+x)^{r-1}=r\left\{\frac{1}{x^{1-r}}-\frac{1}{(a+x)^{1-r}}\right\}>0$$

これより，$f(x)>f(0)=0$ となる。

(i)(ii)より，$(a+x)^r \leqq a^r+x^r$ が成り立つ。

(2)　$a_k \geqq 0\ (1 \leqq k \leqq n)$ のとき，$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r \leqq \sum_{k=1}^{n}a_k{}^r$ の成立を数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$\left(\sum_{k=1}^{1}a_k\right)^r=a_1{}^r=\sum_{k=1}^{1}a_k{}^r$

(ii)　$n=l$ のとき　$\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)^r \leqq \sum_{k=1}^{l}a_k{}^r$ と仮定する，すなわち，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_l)^r \leqq a_1{}^r+a_2{}^r+\cdots+a_l{}^r$$

両辺$+a_{l+1}{}^r$ とすると，$(a_1+a_2+\cdots+a_l)^r+a_{l+1}{}^r \leqq a_1{}^r+a_2{}^r+\cdots+a_l{}^r+a_{l+1}{}^r$

ここで，(1)から，$(a_1+a_2+\cdots+a_l+a_{r+1})^r \leqq (a_1+a_2+\cdots+a_l)^r+a_{l+1}{}^r$ となり，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_l+a_{r+1})^r \leqq a_1{}^r+a_2{}^r+\cdots+a_l{}^r+a_{l+1}{}^r$$

よって，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r \leqq \sum_{k=1}^{n}a_k{}^r$ が成り立つ。

［解　説］

不等式の証明問題です。(1)の結果の利用を考えると，(2)で，数学的帰納法という発想は容易です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　0 以上の整数 n に対し，$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおくとき，

$$C_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^{n+1} x\,dx$$

$$= \left[\sin x \cos^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^n x(-\sin x)\,dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x\,dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx$$

$$= (n+1)C_n - (n+1)C_{n+2}$$

すると，$(n+2)C_{n+2} = (n+1)C_n$ となり，$C_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}C_n \cdots\cdots\cdots(*)$

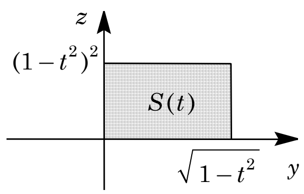
(2)　連立不等式 $x^2 + y^2 \leqq 1$，$z + 2x^2 - x^4 \leqq 1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ で表される領域を $x = t$ で切断し，その切り口の面積を $S(t)$ とすると，

$$t^2 + y^2 \leqq 1,\ z + 2t^2 - t^4 \leqq 1,\ t \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

すると，$t \geqq 0$ かつ $1 - t^2 \geqq 0$，すなわち $0 \leqq t \leqq 1$ のもとで，

$$-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2},\ z \leqq 1 - 2t^2 + t^4 = (1-t^2)^2,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

この連立不等式を図示すると，右図の網点部となり，



$$S(t) = (1-t^2)^2\sqrt{1-t^2} = (1-t^2)^{\frac{5}{2}}$$

これより，求める領域の体積 V は，

$$V = \int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{5}{2}}\,dt$$

ここで，$t = \sin\theta$ とおくと，$dt = \cos\theta\,d\theta$ となり，

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{5}{2}}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\,d\theta = C_6$$

$(*)$より，$C_6 = \dfrac{5}{6}C_4 = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}C_2 = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}C_0 = \dfrac{5}{16}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \dfrac{5}{32}\pi$ となり，

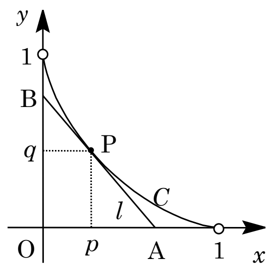
$$V = \frac{5}{32}\pi$$

［解　説］

連立不等式で表された立体の体積を求める標準的な問題です。解答例では，不等式に最も多く現れる x を固定するという常套手段で処理をしています。なお，$(*)$は結論を記憶してもよいくらいの有名な漸化式です。

3

問題のページへ



(1)　第 1 象限内の曲線$C: x^r + y^r = 1\ (0 < r < 1)$に対し，

$$rx^{r-1} + ry^{r-1}\frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{r-1}}{y^{r-1}}$$

さて，C 上に点$\mathrm{P}(p,\ q)$をとると，$p^r + q^r = 1$ ………①

そして，P における接線 l の方程式は，

$$y - q = -\frac{p^{r-1}}{q^{r-1}}(x - p)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②において $y = 0$ とすると，$-q = -\dfrac{p^{r-1}}{q^{r-1}}(x - p)$ から，①を用いると，

$$p^{r-1}x = p^r + q^r,\ x = \frac{p^r + q^r}{p^{r-1}} = \frac{1}{p^{r-1}} = p^{1-r}$$

また，②において $x = 0$ とすると，$y - q = -\dfrac{p^{r-1}}{q^{r-1}}(-p)$ から，①を用いると，

$$y = \frac{p^r}{q^{r-1}} + q = \frac{p^r + q^r}{q^{r-1}} = \frac{1}{q^{r-1}} = q^{1-r}$$

よって，l と x 軸の交点 A は $\mathrm{A}(p^{1-r},\ 0)$，l と y 軸の交点 B は $\mathrm{B}(0,\ q^{1-r})$ である。

(2)　条件より，どんな p に対しても AB が一定なので，$\mathrm{AB}^2 = k$ とおくと，(1)から，

$$p^{2-2r} + q^{2-2r} = k$$

両辺を p で微分すると $(2-2r)p^{1-2r} + (2-2r)q^{1-2r}\dfrac{dq}{dp} = 0$ となり，

$$p^{1-2r} + q^{1-2r}\frac{dq}{dp} = 0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

また，①の両辺を p で微分すると，$rp^{r-1} + rq^{r-1}\dfrac{dq}{dp} = 0$ となり，$\dfrac{dq}{dp} = -\dfrac{p^{r-1}}{q^{r-1}}$

③に代入すると，$p^{1-2r} - q^{1-2r}\cdot\dfrac{p^{r-1}}{q^{r-1}} = 0$ から，$p^{1-2r}q^{r-1} - p^{r-1}q^{1-2r} = 0$ となり，

$$p^{2-3r} = q^{2-3r},\ \left(\frac{q}{p}\right)^{2-3r} = 1\ \cdots\cdots\cdots ④$$

p が $0 < p < 1$ の任意の値をとるとき $\dfrac{q}{p}$ は任意の正の値をとり，このとき④が成立する条件は，$2 - 3r = 0$ すなわち $r = \dfrac{2}{3}$ である。なお，この値は $0 < r < 1$ を満たす。

［解　説］

接線の絡んだ有名な問題で，類題もよく出題されています。なお，結論の曲線はアステロイドです。

4

問題のページへ

(1)　赤球が k 個，白球が $n-k$ 個入っている袋 k を選んだとき，与えられた操作を行い，赤球をちょうど m 回取り出す確率は，$\dfrac{1}{n}{}_{10}\mathrm{C}_m\left(\dfrac{k}{n}\right)^m\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{10-m}$ である。

すると，袋 1 から袋 n から 1 つの袋を選んだ後，与えられた操作を行い，赤球をちょうど m 回取り出す求める確率 $P_{m,n}$ は，

$$P_{m,n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{10}\mathrm{C}_m\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(\frac{n-k}{n}\right)^{10-m}$$

(2)　$P_{10,n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{k}{n}\right)^{10}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{10-10}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{10}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}P_{10,n}=\int_0^1 x^{10}\,dx=\frac{1}{11}\Big[x^{11}\Big]_0^1=\frac{1}{11}$$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{m,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{10}\mathrm{C}_m\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(\frac{n-k}{n}\right)^{10-m}={}_{10}\mathrm{C}_m\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(1-\frac{k}{n}\right)^{10-m}$

$$={}_{10}\mathrm{C}_m\int_0^1 x^m(1-x)^{10-m}\,dx\cdots\cdots\cdots①$$

同様に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{m+1,n}={}_{10}\mathrm{C}_{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}\,dx\cdots\cdots\cdots②$

ここで，${}_{10}\mathrm{C}_m=\dfrac{10!}{m!\,(10-m)!}=\dfrac{m+1}{10-m}\cdot\dfrac{10!}{(m+1)!\,(9-m)!}=\dfrac{m+1}{10-m}{}_{10}\mathrm{C}_{m+1}$ となり，

また $I_{m,10-m}=\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^{10-m}dx$ とおくと，

$$I_{m,10-m}=\frac{1}{m+1}\Big[x^{m+1}(1-x)^{10-m}\Big]_0^1-\frac{10-m}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}\cdot(-1)\,dx$$

$$=\frac{10-m}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}\,dx=\frac{10-m}{m+1}I_{m+1,9-m}$$

これより，${}_{10}\mathrm{C}_m\cdot I_{m,10-m}=\dfrac{m+1}{10-m}{}_{10}\mathrm{C}_{m+1}\cdot\dfrac{10-m}{m+1}I_{m+1,9-m}={}_{10}\mathrm{C}_{m+1}\cdot I_{m+1,9-m}$

よって，①②から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{m,n}=\lim_{n\to\infty}P_{m+1,n}$ が成り立つ。

［解　説］

確率と区分求積法の融合問題です。丁寧な計算が要求されています。