1

解答解説のページへ

駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする。n は 0 以上の整数とし，時刻 n に点 $(x,\ y)$ にある駒は，時刻 $n+1$ には $\dfrac{1}{4}$ ずつの確率で，4 点 $(x+1,\ y)$，$(x-1,\ y)$，$(x,\ y+1)$，$(x,\ y-1)$ のいずれかに移動するものとする。時刻 0 に点 $(0,\ 0)$ にある駒について，次の問いに答えよ。

(1)　時刻 2 に，駒が点 $(0,\ 0)$，点 $(1,\ 0)$，点 $(1,\ 1)$，点 $(2,\ 0)$ にある確率を，それぞれ求めよ。

(2)　時刻 4 に，駒が点 $(0,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(3)　時刻 n に駒が点 $(x,\ y)$ にあるとき，n と $x+y$ の差は 2 の倍数であることを示せ。

2

解答解説のページへ

$f(x)=2^{3x}+2^{-3x}-4(2^{2x}+2^{-2x})$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　k を実数とする。x についての方程式 $2^x+2^{-x}=k$ の実数解の個数を求めよ。

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく。$f(x)$ を t で表せ。

(3)　x がすべての実数を動くとき，$f(x)$ が最小となるような x と，そのときの $f(x)$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

三角形 OAB において，辺 AB を$1:2$に内分する点をO'，辺 BO を$1:2$に内分する点をA'，辺 OA を$1:2$に内分する点をB'とし，線分AA'とBB'の交点を P，BB'とOO'の交点を Q，OO'とAA'の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{OR}:\mathrm{RO}'=6:1$となることを示せ。

(3)　三角形 PQR の面積Mを三角形 OAB の面積Sを用いて表せ。

4

解答解説のページへ

1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC の辺 OA 上に A 以外の点 P をとる。点 P から平面 ABC へ垂線をおろし，その垂線と平面 ABC の交点を H とする。 $\mathrm{PA}=t$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　三角形 HBC の面積 S を t を用いて表せ。

(2)　線分 PH の長さを t を用いて表せ。

(3)　四面体 PHBC の体積 V が最大となるような t と，そのときの V の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　時刻 0 に原点にあった駒が，単位時間ごとに右，左，上，下にそれぞれ 1 つ，$\dfrac{1}{4}$ ずつの確率で，a 回，b 回，c 回，d 回移動するとき，時刻 2 において，

$$a+b+c+d=2\quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0,\ d\geqq 0)\cdots\cdots\cdots①$$

点$(0,\ 0)$にあるのは，$a-b=0$ かつ $c-d=0$ より，①から $a+c=1$ となり，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1)$$

このときの確率は，$2!\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+2!\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ になる。

点$(1,\ 0)$にあるのは，$a-b=1$ かつ $c-d=0$ より，①から $2a+2c=3$ となり，満たす$(a,\ b,\ c,\ d)$は存在しないので，このときの確率は 0 になる。

点$(1,\ 1)$にあるのは，$a-b=1$ かつ $c-d=1$ より，①から $a+c=2$ となり，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$$

このときの確率は，$2!\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$ になる。

点$(2,\ 0)$にあるのは，$a-b=2$ かつ $c-d=0$ より，①から $a+c=2$ となり，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 0,\ 0,\ 0)$$

このときの確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$ になる。

(2)　時刻 4 に，駒が点$(0,\ 0)$にあるのは，

$$a+b+c+d=4\quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0,\ d\geqq 0)\cdots\cdots\cdots②$$

$a-b=0$ かつ $c-d=0$ より，②から $a+c=2$ となり，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 2,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 2,\ 2)$$

このときの確率は，$\dfrac{4!}{2!2!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^4+4!\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^4+\dfrac{4!}{2!2!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^4=\dfrac{36}{4^4}=\dfrac{9}{64}$ になる。

(3)　時刻 n に駒が点$(x,\ y)$にあるとき，

$$a+b+c+d=n\quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0,\ d\geqq 0)\cdots\cdots\cdots③$$

$a-b=x$ かつ $c-d=y$ より，③から

$$n-(x+y)=(a+b+c+d)-(a-b+c-d)=2(b+d)$$

よって，n と $x+y$ の差は 2 の倍数である。

［解　説］

ランダムウォークについての基本的な問題です。(2)，(3)と同じように，(1)も記述しました。丁寧すぎたかもしれませんが。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　方程式 $2^x+2^{-x}=k\cdots\cdots(*)$ において，$2^x=u>0$ とおくと，$u+\dfrac{1}{u}=k$ から，

$$u^2-ku+1=0\,,\ \left(u-\frac{k}{2}\right)^2+1-\frac{k^2}{4}=0$$

$F(u)=u^2-ku+1$ とおき，$F(0)=1$ に注意すると，$F(u)=0$ の正の実数解は,

(i)　$\dfrac{k}{2}\leqq 0\ (k\leqq 0)$ のとき　$F(u)=0$ の実数解 $u>0$ は存在しない。

(ii)　$\dfrac{k}{2}>0\ (k>0)$ のとき

(ii-i)　$1-\dfrac{k^2}{4}>0\ (k<2)$ のとき　$F(u)=0$ の実数解 $u>0$ は存在しない。

(ii-ii)　$1-\dfrac{k^2}{4}=0\ (k=2)$ のとき　$F(u)=0$ の実数解 $u>0$ は 1 つ存在する。

(ii-iii)　$1-\dfrac{k^2}{4}<0\ (k>2)$ のとき　$F(u)=0$ の実数解 $u>0$ は 2 つ存在する。

(i)(ii)より，$u>0$ と x の値は 1 対 1 の対応をするので，$(*)$の実数解の個数は,

$k<2$ のとき 0 個，$k=2$ のとき 1 個，$k>2$ のとき 2 個

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，$t\geqq 2$ となり，

$$\begin{aligned}f(x)&=2^{3x}+2^{-3x}-4(2^{2x}+2^{-2x})\\&=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})-4\{(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\}\\&=t^3-3t-4(t^2-2)=t^3-4t^2-3t+8\end{aligned}$$

(3)　$f(x)=g(t)$ とおくと，$t\geqq 2$ において，$g(t)=t^3-4t^2-3t+8$

$$g'(t)=3t^2-8t-3=(3t+1)(t-3)$$

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	-10	↗

これより，$g(t)$ の増減は右表のようになり，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は最小値 -10 をとる。

このとき，$t=3$ から $2^x+2^{-x}=3$ となり，

$$2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0\,,\ 2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

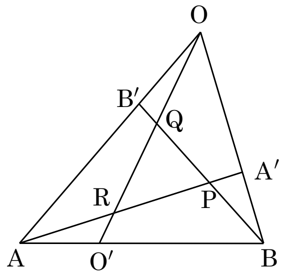
よって，$x=\log_2\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ となる。

［解　説］

指数関数と微分法の融合した基本的な問題です。

3

問題のページへ



(1)　△OAB において，$\mathrm{AO'}:\mathrm{O'B}=1:2$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

(2)　$\mathrm{BA'}:\mathrm{A'O}=1:2$，$\mathrm{OB'}:\mathrm{B'A}=1:2$ として，線分 AA′ と BB′ の交点，BB′ と OO′ の交点，OO′ と AA′ の交点を，それぞれ P, Q, R とおく。すると，k を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}k\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$$

点 R は AA′ 上にあるので，$\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}k=1$ より $\frac{7}{6}k=1$ となり，$k=\frac{6}{7}$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$，すなわち $\mathrm{OR}:\mathrm{RO'}=6:1$ である。

(3)　△PQR の面積を M，△OAB の面積を S とおくと，(2)より，

$$\triangle\mathrm{OAR}=\frac{6}{7}\triangle\mathrm{OAO'}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{2}{7}S$$

同様にして，$\mathrm{AP}:\mathrm{PA'}=6:1$，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QB'}=6:1$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{2}{7}S，\ \triangle\mathrm{BOQ}=\frac{2}{7}S$$

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OAB}-(\triangle\mathrm{OAR}+\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{BOQ})$ より，

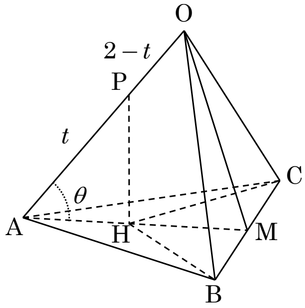
$$M=S-\left(\frac{2}{7}S+\frac{2}{7}S+\frac{2}{7}S\right)=\frac{1}{7}S$$

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用についての基本問題です。(2)は，(1)の設問を考えると，メネラウスの定理を利用するほどでもありません。

4

問題のページへ



(1)　1 辺の長さ 2 の正四面体 OABC に対して，辺 OA 上に点 P を $\mathrm{PA}=t\ (0<t\leqq 2)$ となるようにとる。点 P から平面 ABC へ垂線をおろし，その垂線と平面 ABC の交点を H とすると，対称性から，点 H は点 A と線分 BC の中点 M を結ぶ線分上にある。

ここで，$\angle\mathrm{OAM}=\theta$ とおくと，$\mathrm{OM}=\mathrm{AM}=\sqrt{3}$ から，△OAM に余弦定理を適用すると，

$$\cos\theta=\frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

これより，$\mathrm{HM}=\mathrm{AM}-\mathrm{PA}\cos\theta=\sqrt{3}-\dfrac{t}{\sqrt{3}}$ となり，△HBC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}(3-t)$$

(2)　$\mathrm{PH}=\mathrm{PA}\sin\theta=t\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}t$

(3)　四面体 PHBC の体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}S\cdot\mathrm{PH}$ から，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(3-t)\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}t=\frac{\sqrt{2}}{9}(3t-t^2)=-\frac{\sqrt{2}}{9}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{9}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

これより，V は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

［解 説］

正四面体を題材にした図形の計量についての基本題です。