1

解答解説のページへ

半径 1 の円柱を，底面の直径を含み底面と角α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$をなす平面で切ってできる小さい方の立体を考える。ただし，円柱の高さは$\tan\alpha$以上であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　この立体の体積Vを求めよ。

(2)　切り口の面積Aを求めよ。

(3)　この立体の側面積Bを求めよ。

2

解答解説のページへ

t を $0<t<\dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする。三角形 OAB において，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を O'，辺 BO を $t:(1-t)$ に内分する点を A'，辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を B' とし，線分 AA' と BB' の交点を P，BB' と OO' の交点を Q，OO' と AA' の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OR}:\mathrm{RO}'$ を t を用いて表せ。

(3) 三角形 PQR の面積 M を三角形 OAB の面積 S と t を用いて表せ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

三角形があり，その頂点を反時計回りの順に A，B，C とする。三角形 ABC において，点 P は頂点 A から出発し，1 秒経過するごとに隣の頂点へ移動する。ただし，反時計回りに移動する確率は$\dfrac{2}{3}$，時計回りに移動する確率は$\dfrac{1}{3}$とする。n を自然数とし，点 P が頂点 A を出発してから n 秒経過したときに頂点 A, B, C にある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を，a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(2)　a_{n+2} を c_n を用いて表せ。

(3)　a_{n+6} を a_n を用いて表せ。

(4)　0 以上の整数 k に対して a_{6k+1} を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)\ (x>0,\ y>0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)\ (a>0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)\ (b>0)$は，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=1$をみたすものとする。O を原点とし，線分 OA, AP, PB, BO で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

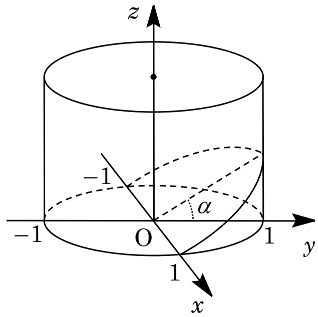
(1)　$\angle\mathrm{APB}$を固定して 3 点 P, A, B を動かす。S が最大となるとき，$x=y$ かつ $a=b$ であることを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{APB}$を固定せず，条件 $x=y$ かつ $a=b$ のもとで 3 点 P, A, B を動かす。このとき，S の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 右図において，円柱は，$x^2+y^2\leqq 1$，$z\geqq 0$ ………①



x 軸を含み，xy 平面と角 α をなす平面の下側は，

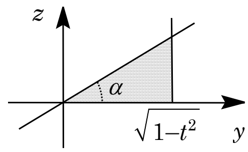
$z\leqq(\tan\alpha)y$ ………②

①かつ②で表される立体を，$x=t\ (-1\leqq y\leqq 1)$ で切断したとき，その切断面は $t^2+y^2\leqq 1$ から，

$-\sqrt{1-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-t^2}$，$z\geqq 0$，$z\leqq(\tan\alpha)y$

この面積を $S(t)$ とおくとき，

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{1-t^2}\tan\alpha=\frac{1}{2}(1-t^2)\tan\alpha$$



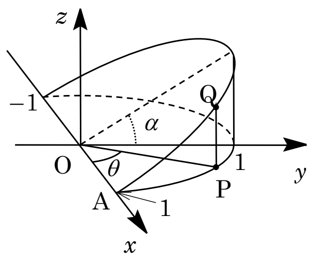
求める立体の体積 V は，

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)dt=\frac{1}{2}\tan\alpha\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt$$
$$=\tan\alpha\int_{0}^{1}(1-t^2)dt=\tan\alpha\Big[t-\frac{t^3}{3}\Big]_0^1=\frac{2}{3}\tan\alpha$$

(2) 円柱①を平面②によって切断してできる切り口を xy 平面に正射影すると，半径 1 の半円になるので，その切り口の面積 A は，

$$A\cos\alpha=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2,\quad A=\frac{\pi}{2\cos\alpha}$$

(3) 円柱底面上にある点 P について，線分 OP を x 軸の正の向きからはかった角を θ とおくと，弧 AP の長さは θ となる。また，点 P を通り z 軸に平行な直線と平面②との交点を Q とする。すると，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ から，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \tan\alpha\sin\theta)$ と表すことができる。

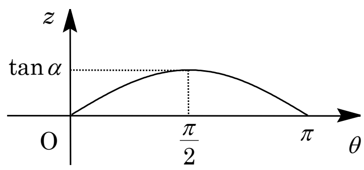


さて，①かつ②で表される立体の側面を展開して，θz 平面上に図示すると，点 Q の描く図形の方程式は，

$z=\tan\alpha\sin\theta$

これより，立体の側面積 B は，

$$B=\int_0^{\pi}\tan\alpha\sin\theta\,d\theta=\tan\alpha\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi}$$
$$=-\tan\alpha(-1-1)=2\tan\alpha$$

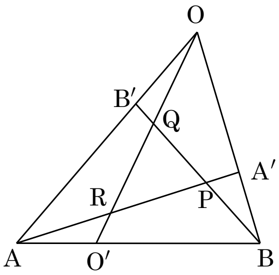


［解 説］

立体の体積および表面積についての標準的な問題です。(2)については，有名な事柄なので，定積分のプロセスを省略しています。

2

問題のページへ



(1) $\triangle$OAB において，$\mathrm{AO}':\mathrm{O}'\mathrm{B}=t:(1-t)\left(0<t<\dfrac{1}{2}\right)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OO}'}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

(2) $\mathrm{BA}':\mathrm{A}'\mathrm{O}=t:(1-t)$，$\mathrm{OB}':\mathrm{B}'\mathrm{A}=t:(1-t)$ として，線分 AA′ と BB′ の交点，BB′ と OO′ の交点，OO′ と AA′ の交点を，それぞれ P, Q, R とおく。すると，k を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OO}'}=k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+kt\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{kt}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$$

点 R は AA′ 上にあるので，$k(1-t)+\dfrac{kt}{1-t}=1$ より $\dfrac{1-t+t^2}{1-t}k=1$ となり，

$$k=\frac{1-t}{1-t+t^2}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1-t}{1-t+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ なので，

$$\mathrm{OR}:\mathrm{RO}'=\frac{1-t}{1-t+t^2}:\left(1-\frac{1-t}{1-t+t^2}\right)=(1-t):t^2$$

(3) $\triangle$PQR の面積を M, $\triangle$OAB の面積を S とおくと，(2)より，

$$\triangle\mathrm{OAR}=\frac{1-t}{1-t+t^2}\triangle\mathrm{OAO}'=\frac{1-t}{1-t+t^2}\cdot t\triangle\mathrm{OAB}=\frac{t(1-t)}{1-t+t^2}S$$

同様にして，$\mathrm{AP}:\mathrm{PA}'=(1-t):t^2$，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QB}'=(1-t):t^2$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{t(1-t)}{1-t+t^2}S,\quad \triangle\mathrm{BOQ}=\frac{t(1-t)}{1-t+t^2}S$$

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OAB}-(\triangle\mathrm{OAR}+\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{BOQ})$ より，

$$M=S-\frac{t(1-t)}{1-t+t^2}S\times 3=\frac{1-4t+4t^2}{1-t+t^2}S$$

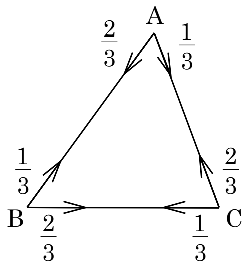
［解 説］

平面ベクトルの三角形への応用についての基本問題です。(2)は，(1)の設問を考えると，メネラウスの定理を利用するほどでもありません。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　△ABC の 3 つの頂点を，点 P は A から出発し，1 秒経過するごとに右図の確率で隣の頂点へ移動する。



そして，n 秒経過したときに頂点 A, B, C にある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とすると，

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}c_n,\quad b_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3}a_n$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n$$

(2)　(1)の漸化式より，$a_n+b_n+c_n=1$ に留意して，

$$a_{n+2}=\frac{1}{3}b_{n+1}+\frac{2}{3}c_{n+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3}a_n\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n\right)$$

$$=\frac{4}{9}a_n+\frac{4}{9}b_n+\frac{1}{9}c_n=\frac{4}{9}(1-c_n)+\frac{1}{9}c_n=-\frac{1}{3}c_n+\frac{4}{9}$$

(3)　(2)と同様にすると，$b_{n+2}=-\frac{1}{3}a_n+\frac{4}{9}$，$c_{n+2}=-\frac{1}{3}b_n+\frac{4}{9}$ となり，

$$a_{n+6}=-\frac{1}{3}c_{n+4}+\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}b_{n+2}+\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}=\frac{1}{9}b_{n+2}+\frac{8}{27}$$

$$=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}a_n+\frac{4}{9}\right)+\frac{8}{27}=-\frac{1}{27}a_n+\frac{28}{81}$$

(4)　0 以上の整数 k に対して，$p_k=a_{6k+1}$ とおくと，(3)の漸化式から，

$$p_{k+1}=a_{6k+7}=-\frac{1}{27}a_{6k+1}+\frac{28}{81}=-\frac{1}{27}p_k+\frac{28}{81}$$

$p_{k+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{27}\left(p_k-\frac{1}{3}\right)$ と変形し，$p_0=a_1=0$ から，

$$p_k-\frac{1}{3}=\left(p_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{27}\right)^k=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^k$$

すると，$a_{6k+1}=p_k=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{27}\right)^k\right\}$ となる。

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。(2)と(3)が，(4)への強力な誘導になっています。

4

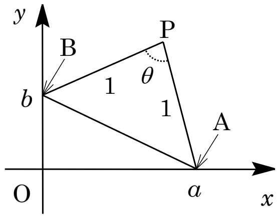
問題のページへ

(1) $x,\ y,\ a,\ b$ を正の実数とし，原点 O，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ に対して，

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=1$ から，

$$(x-a)^2+y^2=1\ \cdots\cdots①,\quad x^2+(y-b)^2=1\ \cdots\cdots②$$

さて，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ を固定して 3 点 P, A, B を動かすとき，線分 OA, AP, PB, BO で囲まれた図形の面積 S が最大となる場合を考えると，まず P と O は直線 AB に関して反対側にあるので，



$$S=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，△ABP に余弦定理を適用すると，$\mathrm{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1^2\cdot\cos\theta$ より，

$$a^2+b^2=2-2\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots④$$

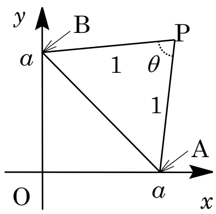
④より a^2+b^2 は一定値をとり，そこで相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqq ab\quad（等号は a=b のとき成立）$$

すると，$S\leqq\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta$ となり，S が最大となるとき，$a=b$ が成り立つ。

このとき，②は $x^2+(y-a)^2=1$ となり，①との差をとると $-2ax+2ay=0$ から，$x=y$ である。

(2) $x=y$ かつ $a=b$ のもとで 3 点 P, A, B を動かすとき，S が最大となる場合を考えると，(1)と同様に，P と O は直線 AB に関して反対側にある。



このとき，④から $2a^2=2-2\cos\theta$ となり，$a^2=1-\cos\theta$ なので，③に代入すると，

$$S=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\pi$ より，$\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき，S は最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$ をとる。

［解 説］

図形量の最大・最小問題です。(1)は θ が固定なので△PAB の面積は定数となり，積 ab に注目，(2)は θ が変動するので S を θ の式として表し，式計算を行っています。