1

解答解説のページへ

自然数 n に対して，$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ とおく。また，

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots\cdots 5\cdot 3\cdot 1 & (n\text{ が奇数のとき}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots\cdots 6\cdot 4\cdot 2 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$1000\,!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ。

(2)　$1000\,!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ。

(3)　$999\,!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ。

2

解答解説のページへ

$m,\ t$ を正の実数とし，$mt>1$ とする。xy 平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(0,\ t)$ をとる。原点を O$(0,\ 0)$ とする。また，2 直線 $l_1 : y=-\dfrac{1}{m}x+t$，$l_2 : y=m(x-1)$ の交点を P とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を m と t を用いて表せ。

(2) 三角形 OAP の外接円の直径を m と t を用いて表せ。

(3) t を固定したとき，$\angle$OPA の大きさは m によらず一定であることを示せ。

3

解答解説のページへ

p を正の実数，q を $-2p^3 < q < 2p^3$ をみたす実数とする。$f(x) = x^3 - 3p^2x + q$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　x が実数全体を動くとき，$f(x)$ が極値をとる x とそのときの極値をすべて求めよ。

(2)　方程式 $f(x) = 0$ は相異なる 3 つの実数解をもつことを示せ。

(3)　(2)の 3 つの解は，すべて $-2p < x < 2p$ をみたすことを示せ。

(4)　(2)の 3 つの解のうちの 1 つを $0 < \theta < \pi$ である θ を用いて $2p\cos\theta$ と表したとき，$2p\cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$2p\cos\left(\theta + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ も解となることを示せ。

4

解答解説のページへ

$0<k<1$ とする。平面上の凸四角形 ABCD に対して，点 P, Q, R, S を関係式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DS}}=k\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ によって定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) 原点を O とする。等式 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ が成り立つことを示せ。

(2) 比の値 $\dfrac{(\text{六角形PBQRDSの面積})}{(\text{四角形ABCDの面積})}$ を k を用いて表せ。

(3) 比の値 $\dfrac{(\text{四角形PQRSの面積})}{(\text{四角形ABCDの面積})}$ を k を用いて表せ。

(4) $0<k<1$ の範囲で k を動かすとき，(3)の比の値の最小値とそのときの k を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　1 から 1000 までの自然数のうち，3 の倍数の個数を n_1，$3^2=9$ の倍数の個数を n_2，$3^3=27$ の倍数の個数を n_3，$3^4=81$ の倍数の個数を n_4，$3^5=243$ の倍数の個数を n_5，$3^6=729$ の倍数の個数を n_6 とする。

このとき，$1000!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数 N_1 は,

$$\begin{aligned}N_1&=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6\\&=\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{9}\right]+\left[\frac{1000}{27}\right]+\left[\frac{1000}{81}\right]+\left[\frac{1000}{243}\right]+\left[\frac{1000}{729}\right]\\&=333+111+37+12+4+1=498\end{aligned}$$

(2)　$1000!!=2^{500}\times 500!$ なので，$1000!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数 N_2 は, (1)と同様にして,

$$\begin{aligned}N_2&=\left[\frac{500}{3}\right]+\left[\frac{500}{9}\right]+\left[\frac{500}{27}\right]+\left[\frac{500}{81}\right]+\left[\frac{500}{243}\right]\\&=166+55+18+6+2=247\end{aligned}$$

(3)　$1000!=1000!!\times 999!!$ なので，$999!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数 N_3 は,

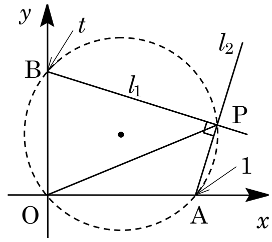
$$N_3=N_1-N_2=498-247=251$$

［解　説］

素因数の個数についての有名問題です。ガウス記号を使用すると，すっきりと示せます。

2

問題のページへ



(1)　$m>0$，$t>0$，$mt>1$ のとき，　$l_1: y=-\dfrac{1}{m}x+t\cdots\cdots$①，

$l_2: y=m(x-1)\cdots\cdots$②を連立して，

$$-\frac{1}{m}x+t=m(x-1),\ \left(m+\frac{1}{m}\right)x=m+t$$

すると，$x=\dfrac{m(m+t)}{m^2+1}$ となり，①から，

$$y=-\frac{1}{m}\cdot\frac{m(m+t)}{m^2+1}+t=\frac{m(mt-1)}{m^2+1}$$

よって，l_1 と l_2 の交点 P の座標は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{m(m+t)}{m^2+1},\ \dfrac{m(mt-1)}{m^2+1}\right)$ である。

(2)　l_1 と l_2 は点 P で垂直に交わるので，$\angle\mathrm{AOB}+\angle\mathrm{APB}=180^\circ$ となり，四角形 OAPB は円に内接する。

この円が△OAP の外接円となるので，その直径は $\mathrm{AB}=\sqrt{t^2+1}$ である。

(3)　t を固定したとき，(2)から△OAP の外接円の大きさは一定となる。

しかも，点 P は第 1 象限内に存在し，$\mathrm{OA}=1$ から，円周角 $\angle\mathrm{OPA}$ の大きさは m によらず一定である。

［解　説］

円と直線についての基本題です。(2)と(3)の解答例は，もう少し詳しく記した方がよかったかもしれません。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-3p^2x+q\ (p>0)$に対して，

$$f'(x)=3x^2-3p^2=3(x+p)(x-p)$$

すると，$f(x)$の増減は右表のようになる。

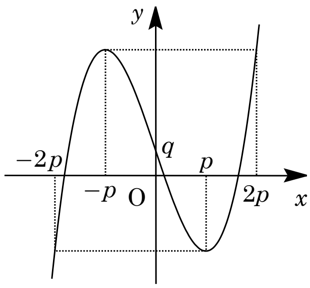
x	$\cdots$	$-p$	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，$f(x)$は$x=-p$のとき極大値$f(-p)=2p^3+q$，$x=p$のとき極小値$f(p)=-2p^3+q$をとる。

(2)　$-2p^3<q<2p^3$より，$f(-p)=2p^3+q>0$，$f(p)=-2p^3+q<0$となるので，$y=f(x)$のグラフはx軸と3個の交点をもつ。

よって，方程式$f(x)=0$は相異なる3つの実数解をもつ。

(3)　$f(-2p)=-2p^3+q<0$，$f(2p)=2p^3+q>0$より，$y=f(x)$のグラフとx軸の3個の交点は，3つの区間$-2p<x<-p$，$-p<x<p$，$p<x<2p$に1つずつある。すなわち，$f(x)=0$の3つの解は，すべて$-2p<x<2p$をみたしている。



(4)　$f(x)=0$の1つの解が$x=2p\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$のとき，$f(2p\cos\theta)=0$から，

$$8p^3\cos^3\theta-6p^3\cos\theta+q=0,\ 2p^3(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+q=0$$

3倍角の公式より，$2p^3\cos3\theta+q=0$となり，このとき，

$$f\Big(2p\cos\Big(\theta+\frac{2\pi}{3}\Big)\Big)=2p^3\cos3\Big(\theta+\frac{2\pi}{3}\Big)+q=2p^3\cos(3\theta+2\pi)+q$$
$$=2p^3\cos3\theta+q=0$$
$$f\Big(2p\cos\Big(\theta+\frac{4\pi}{3}\Big)\Big)=2p^3\cos3\Big(\theta+\frac{4\pi}{3}\Big)+q=2p^3\cos(3\theta+4\pi)+q$$
$$=2p^3\cos3\theta+q=0$$

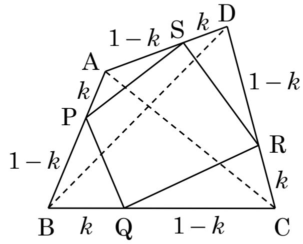
よって，$2p\cos\Big(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\Big)$，$2p\cos\Big(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\Big)$も$f(x)=0$の解となる。

［解　説］

(3)までは，微分と増減についての超頻出問題です。(4)については，3 倍角の公式に気付くだけです。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$0<k<1$ として，四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BQ}=k\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CR}=k\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DS}=k\overrightarrow{DA}$ のとき，

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS})-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\\&=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OD}\\&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{DA}\\&=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\vec{0}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}$ が成り立つ。

(2)　$\triangle\mathrm{APS}=k(1-k)\triangle\mathrm{ABD}$，$\triangle\mathrm{CRQ}=k(1-k)\triangle\mathrm{CDB}$ から，四角形 ABCD の面積を S_0 とおくと，

$$\begin{aligned}(\text{六角形PBQRDSの面積})&=S_0-\triangle\mathrm{APS}-\triangle\mathrm{CRQ}\\&=S_0-k(1-k)\triangle\mathrm{ABD}-k(1-k)\triangle\mathrm{CDB}\\&=S_0-k(1-k)(\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{CDB})\\&=\{1-k(1-k)\}S_0=(k^2-k+1)S_0\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{(\text{六角形PBQRDSの面積})}{(\text{四角形ABCDの面積})}=k^2-k+1$

(3)　$\triangle\mathrm{BQP}=k(1-k)\triangle\mathrm{BCA}$，$\triangle\mathrm{DSR}=k(1-k)\triangle\mathrm{DAC}$ から，

$$\begin{aligned}(\text{四角形PQRSの面積})&=(\text{六角形PBQRDSの面積})-\triangle\mathrm{BQP}-\triangle\mathrm{DSR}\\&=(k^2-k+1)S_0-k(1-k)\triangle\mathrm{BCA}-k(1-k)\triangle\mathrm{DAC}\\&=\{(k^2-k+1)-k(1-k)\}S_0=(2k^2-2k+1)S_0\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{(\text{四角形PQRSの面積})}{(\text{四角形ABCDの面積})}=2k^2-2k+1$

(4)　(3)の比の値を R とおくと，$R=2k^2-2k+1=2\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

k を $0<k<1$ の範囲で動かすとき，R は $k=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

平面ベクトルが題材ですが，内容的には，三角形の面積比の問題です。