1

解答解説のページへ

自然数 n に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して $S_{2n}=T_n$ が成り立つことを示せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

n を自然数とする。$0 \leqq a_k \leqq 1$ をみたす数列 $\{a_k\}$ に対して $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。実数 x に対して $I_n(x) = b_n(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)$ と定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) $a \geqq 0$ とする。$x \geqq 0$ に対して不等式 $1-ax \leqq e^{-ax}$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $\int_0^1 I_n(x)dx \leqq 1$ を示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 1$ が成り立つとき，$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 I_n(x)dx = 1$ となることを示せ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx+\int_1^e (\log y)^2\,dy$ の値を求めよ。

(2)　$f(x)=\tan x$ とする。関数 $y=f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数 $x=f^{-1}(y)$ をもつ。定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ および $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ の値を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e \sqrt{\log y}\,dy$ の値を求めよ。

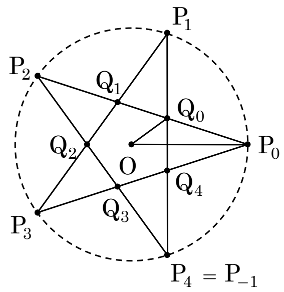
4

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とし，原点 O を中心とする単位円周上に $2n+1$ 個の相異なる点

$$\mathrm{P}_k\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1},\ \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

をとる。また整数 j に対して，j を $2n+1$ で割った余りが $k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n$ のとき，$\mathrm{P}_j=\mathrm{P}_k$ と約束する。この記法のもとで，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+n}$ と線分 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-n}$ との交点を Q_k $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$ とおく。点 P_0，Q_0，P_1，Q_1，$\cdots$，P_{2n}，Q_{2n}，P_0 を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし，その面積を A_n とする。このとき次の問いに答えよ。



$n=2$ のとき

(1)　$\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ および $\angle\mathrm{P_0OQ_0}$ の値を n を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた $\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ の値を θ_n とおく。三角形 $\mathrm{OP_0Q_0}$ の面積を θ_n を用いて表せ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ のとき，$S_{2n}=T_n$ を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$S_2=\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\frac{1}{1}+\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$，$T_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(ii)　$n=l$ のとき　$S_{2l}=T_l$ と仮定し，$S_{2(l+1)}=S_{2l}+\frac{1}{2l+1}-\frac{1}{2l+2}$ から，

$$\begin{aligned}S_{2(l+1)}&=T_l+\frac{1}{2l+1}-\frac{1}{2l+2}=\frac{1}{l+1}+\frac{1}{l+2}+\cdots+\frac{1}{l+l}+\frac{1}{2l+1}-\frac{1}{2l+2}\\&=\frac{1}{l+2}+\cdots+\frac{1}{l+l}+\frac{1}{2l+1}+\left(\frac{1}{l+1}-\frac{1}{2l+2}\right)\\&=\frac{1}{(l+1)+1}+\cdots+\frac{1}{(l+1)+(l-1)}+\frac{1}{(l+1)+l}+\frac{1}{(l+1)+(l+1)}\\&=\sum_{k=1}^{l+1}\frac{1}{(l+1)+k}=T_{l+1}\end{aligned}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $S_{2n}=T_n$ が成り立つ。

(2)　(1)から，$S_{2n}=T_n$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2$$

(3)　$S_{2n-1}=S_{2n}-\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}=S_{2n}+\frac{1}{2n}$ より，(2)の結論を利用すると，

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\log 2$$

［解　説］

数学的帰納法を利用した等式の証明と区分求積法による極限計算を組み合わせた超頻出の問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ において，$f(x) = e^{-ax} - (1 - ax)$　$(a \geqq 0)$ とおくと，

$$f'(x) = -ae^{-ax} + a = a(1 - e^{-ax}) \geqq 0$$

すると，$x \geqq 0$ で $f(x)$ は単調増加し，$f(x) \geqq f(0) = 1 - 1 = 0$ から，

$$1 - ax \leqq e^{-ax} \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　$x \geqq 0$ において，①から，$1 - a_k x \leqq e^{-a_k x}$　$(0 \leqq a_k \leqq 1)$ $\cdots\cdots\cdots$②

ここで，$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geqq 0$，$I_n(x) = b_n(1 - a_1 x)(1 - a_2 x)\cdots(1 - a_n x)$ なので，②から，

$$I_n(x) \leqq b_n e^{-a_1 x} e^{-a_2 x} \cdots e^{-a_n x} = b_n e^{-(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x} = b_n e^{-b_n x} \cdots\cdots\cdots ③$$

③の両辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\int_0^1 I_n(x)dx \leqq \int_0^1 b_n e^{-b_n x} dx = -\Big[\, e^{-b_n x} \,\Big]_0^1 = 1 - e^{-b_n} \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$0 \leqq a_k \leqq 1$ から，

$$I_n(x) \geqq b_n(1 - x)(1 - x)\cdots(1 - x) = b_n(1 - x)^n \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤の両辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\int_0^1 I_n(x)dx \geqq \int_0^1 b_n(1 - x)^n dx = -\frac{b_n}{n+1}\Big[\,(1 - x)^{n+1}\,\Big]_0^1 = \frac{b_n}{n+1} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④⑥より，$\dfrac{b_n}{n+1} \leqq \displaystyle\int_0^1 I_n(x)dx \leqq 1$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I_n(x)dx = 1$$

［解　説］

定積分と不等式に極限を融合した問題です。(3)については，結論から，はさみうちの原理を利用するという方針を立て，⑤を導く点がポイントです。誘導はありませんが……。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$I_1=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx+\int_1^e(\log y)^2\,dy$ とし，$y=e^{\sqrt{x}}$ とおくと $x=(\log y)^2$ から，

$$I_1=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx+\int_0^1 x\cdot\left(e^{\sqrt{x}}\right)'dx=\int_0^1\left\{(x)'\cdot e^{\sqrt{x}}+x\cdot\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(xe^{\sqrt{x}}\right)'dx=\left[\,xe^{\sqrt{x}}\,\right]_0^1=e$$

(2)　$f(x)=\tan x$ のとき，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ とする。

ここで，$y=\tan x$ とおくと $x=f^{-1}(y)$ となり，

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cdot(\tan x)'dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{(x)'\cdot\tan x+x\cdot(\tan x)'\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x\tan x)'\,dx=\left[\,x\tan x\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

また，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\left[\,\log|\cos x|\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$ から，

$$\int_0^1 f^{-1}(y)dy=I_2-\frac{1}{2}\log 2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

(3)　$I_3=\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e\sqrt{\log y}\,dy$ とし，$y=e^{x^2}$ $(x\geqq 0)$ とおくと $x=\sqrt{\log y}$ から，

$$I_3=\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 x\cdot\left(e^{x^2}\right)'dx=\int_0^1\left\{(x)'\cdot e^{x^2}+x\cdot\left(e^{x^2}\right)'\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(xe^{x^2}\right)'dx=\left[\,xe^{x^2}\,\right]_0^1=e$$

［解　説］

逆関数の絡んだ定積分の計算問題で，同様な問題をときどき見受けます。ただ，本問は 3 つの設問とも同じ計算の繰り返しですが。

$\boxed{4}$

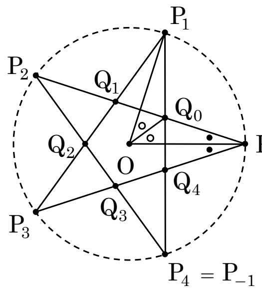
問題のページへ

(1)　原点 O を中心とする単位円周において，$\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ は弧 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ に対する円周角の半分より，

$$\angle\mathrm{OP_0Q_0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2(2n+1)}$$

$\angle\mathrm{P_0OQ_0}$ は弧 $\mathrm{P_0P_1}$ に対する中心角の半分より，

$$\angle\mathrm{P_0OQ_0}=\frac{2\pi}{2n+1}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2n+1}$$



(2)　$\angle\mathrm{OP_0Q_0}=\theta_n$ とおくと，$\angle\mathrm{P_0OQ_0}=2\theta_n$ となる。

すると，$\angle\mathrm{OQ_0P_0}=\pi-3\theta_n$ となり，$\triangle\mathrm{OP_0Q_0}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{OQ_0}}{\sin\theta_n}=\frac{\mathrm{OP_0}}{\sin(\pi-3\theta_n)},\ \frac{\mathrm{OQ_0}}{\sin\theta_n}=\frac{1}{\sin3\theta_n}$$

これより，$\mathrm{OQ_0}=\dfrac{\sin\theta_n}{\sin3\theta_n}$ となるので，

$$\triangle\mathrm{OP_0Q_0}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sin\theta_n}{\sin3\theta_n}\cdot\sin2\theta_n=\frac{\sin\theta_n\sin2\theta_n}{2\sin3\theta_n}$$

(3)　点 $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{Q_1}$，…，P_{2n}，Q_{2n}，$\mathrm{P_0}$ を順に結んでできる折れ線が囲む図形の面積 A_n は，$\triangle\mathrm{OP_0Q_0}$ の面積の $2(2n+1)$ 倍となるので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}A_n&=\lim_{n\to\infty}2(2n+1)\cdot\frac{\sin\theta_n\sin2\theta_n}{2\sin3\theta_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin3\theta_n}\cdot\frac{2\theta_n}{3}(2n+1)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin3\theta_n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2(2n+1)}\cdot(2n+1)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin3\theta_n}\cdot\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

ここで，$n\to\infty$ のとき $\theta_n\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{\pi}{3}$ となる。

［解　説］

図形と極限の融合問題です。問題文に参考図が書かれているため，考えやすくなっています。